

**INTER-AMERICAN TROPICAL TUNA COMMISSION
COMISION INTERAMERICANA DEL ATUN TROPICAL**

Bulletin — Boletín

Vol. 10, No. 5

**A METHOD FOR ESTIMATING THE RATE OF SHEDDING
OF TAGS FROM YELLOWFIN TUNA**

**UN METODO PARA ESTIMAR LA TASA DEL
DESPRENDIMIENTO DE MARCAS DEL
ATUN ALETA AMARILLA**

by — por

Douglas G. Chapman, Bernard D. Fink, and/y Edward B. Bennett

La Jolla, California

1965

CONTENTS — INDICE

ENGLISH VERSION — VERSION EN INGLES

	Page
INTRODUCTION.....	335
MATHEMATICAL PROCEDURES.....	336
RESULTS.....	340

VERSION EN ESPAÑOL — SPANISH VERSION

	Página
INTRODUCCION.....	343
PROCEDIMIENTOS MATEMATICOS.....	344
RESULTADOS.....	349

LITERATURE CITED — BIBLIOGRAFIA CITADA.....	352
---	-----

A METHOD FOR ESTIMATING THE RATE OF SHEDDING OF TAGS FROM YELLOWFIN TUNA

by

Douglas G. Chapman¹, Bernard D. Fink, and Edward B. Bennett

INTRODUCTION

The Inter-American Tropical Tuna Commission has been conducting, since 1955, a large-scale tagging program on tropical tunas to elucidate, by direct methods, certain aspects of their vital statistics and population parameters; the principal species investigated are yellowfin tuna, *Thunnus albacares*, and skipjack, *Katsuwonus pelamis*. The most recent studies concern the estimation of rates of attrition, especially of yellowfin tuna (Fink 1965a).

The rate of total attrition of tagged yellowfin tuna, as directly measured by the diminution with time of the numbers of recaptures of these fish, is considerably higher (Fink 1965a) than the rate of mortality of the untagged population, as measured indirectly by Hennemuth (1961) and Davidoff (1965) from studies of the age composition of the commercial landings. For 1956 to 1958, when most of the tagged yellowfin were marked with plastic loop tags (Broadhead 1959, Schaefer, Chatwin and Broadhead 1961), the difference (Q) between the estimated instantaneous rate of total attrition ($-\log_e$ survival rate) for tagged fish (2.77) and untagged fish (1.72) was 1.05. For the period 1960 to June 1961, when most of the fish were marked with dart tags, (Schaefer 1961 1962, Fink 1965a) the difference between the estimated total attrition of the tagged (3.18) and the untagged (2.12) fish was 1.06, almost identical to that of the earlier period. These differences in the rates of total attrition measured by the direct (tagging) and indirect (age composition) methods were attributed by Fink (1965a) to additional, continuous losses peculiar to tagged fish such as tag shedding and deaths caused by the presence of the tags. He was not able, with the methods employed, to differentiate the additional loss into its component parts since they affected the estimates of total attrition in the same way. [In this regard they are distinct from initial tagging mortality, a loss which affects estimates of fishing mortality but not total mortality (Fink 1965a).]

Although the rate of tag shedding may be estimated for some species by such direct methods as aquarium tests or by a search for tag scars, the double-tagging experiment appears to be the only method presently applicable to large, delicate species such as tuna. In this type of experi-

¹ Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, Washington.

ment the fish are marked with two tags, rather than one; some of the fish are recovered with both tags still remaining and some with only one, while those which have lost both tags remain undetected. From these recovery data, estimates can be made of the rate of shedding. While double tags, either of the same type or different, have been utilized in a number of experiments to confirm the possibility of tag loss, little attention has been given to the use of such recoveries to obtain quantitative estimates of the rate of shedding. One method of analysis of such a double-tagging experiment is given by Beverton and Holt (1957).

The present paper describes a new method for estimating the shedding rate of tags. The method utilizes not only data on tagging and recovery of fish marked with two tags but also data from those marked with one. One important advantage of the new technique is that the estimates of the shedding rates are free from distortion caused by variations in fishing intensity during the total recovery period. The idea of this method appears to be implicit in a short note by Gulland (1963).

This technique has been applied to the data obtained by the Inter-American Tropical Tuna Commission in a tagging cruise off the west coast of southern Baja California, during June 1963, at which time both single- and double-tagged yellowfin tuna were released. Details of the tagging procedure and equipment have been described by Fink (1965b). The results presented in the present paper are for yellowfin tuna tagged with dart tags. Estimates of shedding should be made separately for each species investigated and also for each type of tag used, since these rates may be variable and often unexpectedly high (Springer and McErlean 1961, Chadwick 1963).

MATHEMATICAL PROCEDURES

In any time period t , the recapture of a fish marked with a tag depends on the probabilities of its survival to that period, retention of its tag to that period and recapture during that period. Similarly, for a double-tagged fish to be recovered with both tags, it must survive to the beginning of period t , retain both of its tags and be caught in period t .

Let

$N_S(O)$ = number of fish tagged with one tag only

$N_D(O)$ = number of fish tagged with two tags each

$N_{DS}(t)$ = number of fish at any time t which had two tags but have lost one

n_s = number of recoveries of single-tagged fish

n_{dt} = number of recoveries of double-tagged fish where both of the tags are still present

n_{ds} = number of recoveries of double-tagged fish where but one of the original two tags is left (one lost)

F = instantaneous rate of fishing mortality

M = instantaneous rate of natural mortality and emigration, assumed constant

L = instantaneous rate of loss from tag shedding, assumed constant.

The above definition of L indicates that the instantaneous rate of tag shedding is assumed to be proportional to the number of tags (not tagged fish) present.

At any time t the instantaneous rate of change of a population of single-tagged fish is

$$\frac{dN_s(t)}{dt} = -(F+M+L)N_s(t)$$

Thus, it follows that the population of single-tagged fish at any time t is

$$N_s(t) = N_s(O)e^{-(F+M+L)t}$$

and furthermore that the number of recaptures $n_s(t)$ during the period of length τ centered at t is

$$\begin{aligned} n_s(t) &= FN_s(O) \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} e^{-(F+M+L)t} dt \\ &= \frac{2FN_s(O)}{(F+M+L)} e^{-(F+M+L)t} \sinh (F+M+L) \tau/2 \end{aligned}$$

The value of the hyperbolic sine approximately equals that of its argument when the latter is small (less than 0.5). For this discussion, this is assumed to be the case and it can be shown, *a posteriori*, that this is an excellent assumption. Therefore

$$n_s(t) = F \tau N_s(O)e^{-(F+M+L)t} \quad (1)$$

Now, for double-tagged fish the shedding rate of tags is the same as for the single-tagged fish (assuming no synergism) but, since there are two tags per fish, the instantaneous rate of change of the population is

$$\frac{dN_D(t)}{dt} = -(F+M+2L)N_D(t)$$

Therefore at any time t , the population of double-tagged fish is

$$N_D(t) = N_D(O)e^{-(F+M+2L)t} \quad (2)$$

and, similar to the development above, the number of recaptures of double-tagged fish with both tags still in place during the period $(t-\tau/2, t+\tau/2)$ is

$$n_{dd}(t) = F \tau N_D(O) e^{-(F+M+2L)t} \quad (3)$$

Among other consequences of equations (1) and (3) is the fact that the times of recaptures of single tags and double tags have an exponential distribution. This was first noted and utilized for recoveries in an ordinary tagging experiment by Jackson (1937). The analysis given by Chapman (1961) for an ordinary tagging experiment is readily extended to a double-tagging experiment. In particular if F , M and L are constant and if times of recapture are available, then an unbiased estimate of L is

$$L = \frac{(n_{dd} - 1)}{n_{dd} \bar{t}_{dd}} - \frac{(n_s - 1)}{n_s \bar{t}_s}$$

where \bar{t}_s = mean time of recapture of fish originally released with one tag, and

\bar{t}_{dd} = mean time of recapture of fish originally released with two tags and with both tags retained.

This estimate is the best possible, using only the recovery information of the single tags and of the tags put out and returned as double tags. The determination of the expected number of recaptures of double-tagged fish having but one of the tags remaining is not as simple as the previous two types. This is due to the diminution of the N_{DS} fish from all causes while their number is continuously being added to by loss of a tag from double-tagged fish. In this case the instantaneous rate of change of the population N_{DS} fish is

$$\frac{dN_{DS}(t)}{dt} = 2LN_D(O) e^{-(F+M+2L)t} - (F+M+L)N_{DS}(t)$$

where the first term on the right-hand side, derived from equation (2), is the rate of addition of N_{DS} fish to the population. The number of fish with one tag left at any time t is given by the solution to this differential equation, and is

$$N_{DS}(t) = 2N_D(O) e^{-(F+M+L)t} (1 - e^{-Lt})$$

The number of recaptures of these fish during period t is found to be

$$n_{ds}(t) = 2F \tau N_D(O) e^{-(F+M+L)t} (1 - e^{-Lt}) \quad (4)$$

The probability distribution of the times of recaptures of such fish, *i.e.*, those originally double-tagged but now retaining one tag can be determined from (4) but it is not as simple as the exponential distribution de-

rived from (1) and (3). The optimum estimate utilizing these returns, as well as \bar{t}_S , \bar{t}_{DD} , remains an open question.

However, in any actual fishery the assumptions required for this ideal model are seldom if ever realized, and certainly not in the tropical tuna fishery where there is great variation in fishing intensity over short time periods. In addition M , which includes loss due to such factors as emigration, as well as natural mortality, may change markedly from one season to another.

Nevertheless the equations (1), (3) and (4) can be used to derive an estimation procedure which assures such constancy of rates only over short time periods.

- 1) From equations (1) and (3) it follows that

$$\frac{n_{dd}(t) / N_D}{n_s(t) / N_S} = e^{-Lt}$$

therefore,

$$\log_e \frac{n_{dd}(t) / N_D}{n_s(t) / N_S} = -Lt = Y_{1t} \quad (5)$$

- 2) From equations (1) and (4) it follows that

$$\frac{n_{ds}(t) / N_D}{n_s(t) / N_S} = 2(1 - e^{-Lt})$$

therefore,

$$\log_e \left(1 - \frac{n_{ds}(t) N_S}{2n_s(t) N_D} \right) = -Lt = Y_{2t} \quad (6)$$

- 3) From equations (3) and (4) it follows that

$$\frac{n_{ds}(t)}{n_{dd}(t)} = 2(e^{Lt} - 1)$$

and therefore,

$$\log_e \frac{2n_{dd}(t)}{n_{ds}(t) + 2n_{dd}(t)} = -Lt = Y_{3t} \quad (7)$$

All of the quantities on the left-hand side of equations (5), (6) and (7) can be determined from data of combined single- and double-tagging experiments. For several time periods (not necessarily consecutive nor of uniform length) where t is the mid-point of these periods, it is possible to calculate these quantities and regress them on time. Thus, three separate estimates of L are determinable, each of which is independent of fishing

intensity, natural mortality and even, as can be shown, of initial tag loss. It does not matter what risks of mortality (fishing or natural) the several groups have been exposed to; it is essential only that they both have been and continue to be exposed to the same risks. They differ only in their tag characteristics and thus the only essential assumption is that the loss of tags take place at a continuous rate, *i.e.*, follows an exponential rate of decline.

An alternative way of observing this is to set up a probability model rather than the rate of decline model. Define

θ_t = probability that a fish survives to the beginning of period $(t - \tau/2, t + \tau/2)$, *i.e.*, period t

f_t = probability that a fish is caught in period t

p_t = probability that a tag is lost up to time period t

Then the expected number of returns in time period t in the various categories is

Single tags: $N_s \theta_t f_t (1 - p_t)$

Double tags, both retained: $N_d \theta_t f_t (1 - p_t)^2$

Double tags, only one retained: $N_d \theta_t f_t 2p_t (1 - p_t)$

The assumption of continuous shedding loss at rate L means that $1 - p_t = e^{-Lt}$ and it is seen that by taking ratios and logarithms these expected values lead also to equations (5), (6) and (7).

RESULTS

Recovery data of yellowfin tuna marked with dart tags during 1963 are used to estimate the shedding rate of these tags from this species of fish. Included in the experiment are 2616 fish released with one tag and 534 released with two tags, placed one on either side of the second dorsal fin. From the fish released with a single tag, there were 1704 recoveries; from the fish released with two tags there were 329 recoveries with both tags still remaining and 69 with only one remaining (through the first 120 days of freedom).

The numbers of recoveries in each of six consecutive recovery periods (each of 20 days duration) from both the single- and double-tagged yellowfin are given in the table below. The returns from the double-tagged fish are separated on the basis of whether both tags or only one tag remained at the time of recapture. Also given in this table are the natural logarithms of the various ratios corresponding to equations (5), (6) and (7) that are used for the analysis. These are headed Y_{1t} , Y_{2t} and Y_{3t} respectively.

Days free	$N_S = 2616$				$N_D = 534$		
	t	n_s	n_{dd}	n_{ds}	Y_{1t}	Y_{2t}	Y_{3t}
1- 20	1	1136	239	38	0.0301	-0.0856	-0.0764
21- 40	3	282	56	11	-0.0282	-0.1004	-0.0936
41- 60	5	133	16	8	-0.5290	-0.1594	-0.2231
61- 80	7	73	8	5	-0.6219	-0.1836	-0.2719
81-100	{ 10	50	4	4	{-0.4904	-0.2412	-0.3000}
101-120		30	6	3			

From these data the least-squares regressions give

- 1) from equation (5): $\hat{L}_1 = 6.498 \times 10^{-3}$ per day
- 2) from equation (6): $\hat{L}_2 = 2.653 \times 10^{-3}$ per day
- 3) from equation (7): $\hat{L}_3 = 3.465 \times 10^{-3}$ per day

It should be noted that these estimates of L are the negative of the slopes of the regression lines fitted to the data of the table *through the origin*. The assumption of homoscedasticity has been made as with the usual least-squares fitting though it might also be appropriate to consider that the variances increase as a function of time because the number of recoveries is decreasing as a function of time. The relatively short time period involved here makes it difficult to examine this question in detail. All of these determinations are free from any assumptions about fishing effort and natural mortality since the three different types of tag recaptures are all made with the same effort.

Turning to the question of the best combined estimate of L , it is to be noted that the estimates L_1, L_2, L_3 are correlated. Denote by Σ the variance-covariance matrix of L_1, L_2, L_3 . Further let σ^{ij} denote the elements of Σ^{-1} . Then the minimum variance linear function of L_1, L_2, L_3 is $\sum_{i=1}^3 W_i \hat{L}_i$ where the weights W_i are determined by the equations

$$W_1 = \frac{\sum_j \sigma^{1j}}{\sum_{i,j} \sigma^{ij}} \quad W_2 = \frac{\sum_j \sigma^{2j}}{\sum_{i,j} \sigma^{ij}} \quad W_3 = \frac{\sum_j \sigma^{3j}}{\sum_{i,j} \sigma^{ij}}$$

[cf. Cochran (1963) p. 183-185]. In this situation W_1, W_2, W_3 are not necessarily limited to the interval (0, 1) as in the case of the best linear combination of uncorrelated estimates. Furthermore the variance of this best linear estimate is $(\sum_{i,j} \sigma^{ij})^{-1}$

To determine the elements of Σ note that

$$\sigma_{ii} = \sigma^2(\hat{L}_i) = \frac{\sum Y_{it}^2 + \hat{L}_i \sum (Y_{it})}{\sum t^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum Y_{it} Y_{jt} - (\hat{L}_i \hat{L}_j) (\sum t^2)}{\sum t^2} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$$

Since Σt^2 appears in the denominator of all elements of Σ , it is convenient to ignore it in determining W_1, W_2, W_3 .

The matrix for the data shown above with this denominator omitted is

$$\Sigma = \begin{pmatrix} .13181 & -.00014 & .02025 \\ -.00014 & .00522 & .00464 \\ .02025 & .00464 & .00736 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} .0290 & .1632 & -.1767 \\ .1632 & .9623 & -1.0562 \\ -.1828 & -1.0562 & 1.1828 \end{pmatrix} \times 10^4$$

$$W_1 = 0.418 \quad W_2 = 3.080 \quad W_3 = -2.498$$

$$\hat{L} = 0.00223 \quad \Sigma \Sigma \sigma^{ij} = 0.0225 \times 10^4$$

$$\sigma_{\hat{L}}^2 = \frac{(.1)^2}{.0230} \times 10^{-4} \times \frac{1}{184} = 0.242 \times 10^{-6}$$

Note the factor $\Sigma t^2 = 184$ must be introduced in the variance calculation. Also useful is

$$\sigma_{\hat{L}} = 0.000492 \text{ (daily basis)}$$

On an *annual* basis $\hat{L} = 0.814$

$$\sigma_{\hat{L}} = 0.180$$

The estimate of L (0.814) as calculated here is lower than that of Q (1.05 - 1.06) as determined by Fink (1965a). This is not unexpected since Q may include losses other than those from tag shedding. The difference is small enough, however, to be considered insignificant at any realistic level of comparison, particularly in view of the magnitude of $\sigma_{\hat{L}}$.

UN METODO PARA ESTIMAR LA TASA DEL DESPRENDIMIENTO DE MARCAS DEL ATUN ALETA AMARILLA

por

Douglas G. Chapman¹, Bernard D. Fink y Edward B. Bennett

INTRODUCCION

La Comisión Interamericana del Atún Tropical, ha conducido desde 1955 un programa de marcación en gran escala, de los atunes tropicales para dilucidar por métodos directos, algunos aspectos de sus estadísticas vitales y de los parámetros de la población; las principales especies investigadas son el atún aleta amarilla, *Thunnus albacares*, y el barrilete *Katsuwonus pelamis*. Los estudios más recientes se refieren a la estimación de las tasas de pérdida, especialmente del atún aleta amarilla (Fink 1965a).

La tasa de pérdida total del atún aleta amarilla marcado, conforme ha sido medido directamente por la merma con el tiempo, de la cantidad de recobros de estos peces, es considerablemente más alta (Fink 1965a) que la tasa de mortalidad de la población no marcada, según ha sido medida indirectamente por Hennemuth (1961) y Davidoff (1965) correspondiente a los estudios de la composición de edad de los desembarques comerciales. De 1956 a 1958, cuando la mayor parte del atún aleta amarilla marcado había sido marcado con marcas plásticas de lazo (Broadhead 1959, Schaefer, Chatwin y Broadhead 1961), la diferencia (Q) entre la tasa instantánea estimada de pérdida total ($-\log_e$ tasa de supervivencia) para peces marcados (2.77) y peces no marcados (1.72) fue 1.05. En el período de 1960 a junio de 1961, cuando la mayoría de los peces fue marcada con marcas de dardo, (Schaefer 1961 1962, Fink 1965a) la diferencia entre la estimación total de pérdida de los peces marcados (3.18) y no marcados (2.12) fue 1.06, casi idéntica a la del período anterior. Estas diferencias en las tasas de pérdida total, medidas por medio de los métodos directo (marcación) e indirecto (composición de edad), fueron atribuidos por Fink (1965a) a pérdida adicional continua, tal como el desprendimiento de marcas y muertes causadas por la presencia de las marcas, peculiar de los peces marcados. Fink, no fue capaz con los métodos empleados, de diferenciar la pérdida adicional dentro de las partes de sus componentes, ya que éstas afectaron las estimaciones de la pérdida total de la misma manera. A este respecto son diferentes de la mortalidad inicial de marcación, una pérdida que afecta las estimaciones de mortalidad por la pesca pero no la mortalidad total (Fink 1965a).

A pesar de que la tasa del desprendimiento de marcas puede estimarse en algunas especies por métodos tan directos como por pruebas en los

¹Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, Washington.

acuarios o por búsqueda de cicatrices de marcas, el experimento de la marcación doble parece ser el único método aplicable hasta ahora a grandes y delicadas especies como son los atunes. En esta clase de experimento el pez es marcado con dos marcas, en vez de una; algunos de los peces son recobrados con las dos marcas y otros con una sola, mientras que los que han perdido las dos marcas permanecen sin ser descubiertos. De estos datos de recobros, pueden hacerse estimaciones de la tasa del desprendimiento. Mientras que las dos marcas, ya sea de la misma clase o diferentes, han sido utilizadas en un número de experimentos para confirmar la posibilidad de la pérdida de marcas, se ha prestado poca atención al uso de tales recobros para obtener estimaciones cuantitativas de la tasa de desprendimiento. Un método de análisis de un experimento así de doble marcación, ha sido suministrado por Beverton y Holt (1957).

El presente estudio describe un nuevo método para estimar las tasas del desprendimiento de marcas. El método emplea no solamente los datos sobre la marcación y recobro de peces marcados con dos marcas, pero también datos de los peces marcados con una marca. Una ventaja importante de la nueva técnica, es que las estimaciones de las tasas de desprendimiento son libres de alteración, causada por las variaciones en la intensidad de pesca durante el periodo total de recobro. La idea de este método parece ser implícita en un breve apunte por Gulland (1963).

Esta técnica se ha aplicado a los datos obtenidos por la Comisión Interamericana del Atún Tropical, en un crucero de marcación efectuado frente a la costa occidental al sur de Baja California, en junio de 1963, tiempo en el cual fueron liberados atunes aleta amarilla marcados tanto con una como con dos marcas. Los detalles del procedimiento de la marcación y del equipo usado han sido descritos por Fink (1965b). Los resultados presentados en este estudio, pertenecen al atún aleta amarilla marcado con marcas de dardo. Las estimaciones del desprendimiento deben efectuarse separadamente para cada especie que ha sido investigada y también para cada tipo de marca usado, ya que estas tasas pueden ser variables, y a menudo inesperadamente altas (Springer y McErlean 1961, Chadwick 1963).

PROCEDIMIENTOS MATEMATICOS

En cualquier período de tiempo t , la recaptura de un pez marcado con una marca depende en las probabilidades de su supervivencia a ese período, de la retención de su marca hasta ese período y recaptura durante tal período. Similarmente, para recobrar un pez doblemente marcado, con las dos marcas, debe sobrevivir al principio del período t , retener sus dos marcas y ser cogido en el período t .

Dejemos

$N_s(O)$ = número de peces marcados con una sola marca

$N_D(O)$ = número de peces marcados con dos marcas cada uno

$N_{DS}(t)$ = número de peces en cualquier tiempo t , que tenían dos marcas, pero han perdido una

n_s = número de recobros de peces marcados con una marca

n_{dd} = número de recobros de peces marcados con doble marca, en donde las dos marcas permanecían presentes

n_{ds} = número de recobros de peces doblemente marcados en los que solamente ha quedado una de las marcas originales (una perdida)

F = tasa instantánea de mortalidad por la pesca

M = tasa instantánea de mortalidad natural y de emigración, que se asume constante

L = tasa instantánea de pérdida por desprendimiento de la marca, que se asume constante

La definición anterior de L indica que la tasa instantánea del desprendimiento de marcas, se asume que es proporcional al número de marcas presente (pero no al número de los peces marcados).

En cualquier momento t la tasa instantánea de cambio de una población de peces marcados con una marca es

$$\frac{dN_S(t)}{dt} = -(F+M+L)N_S(t)$$

Así, se sigue la población de peces marcados con una marca en cualquier momento t es

$$N_S(t) = N_S(O)e^{-(F+M+L)t}$$

y además, que el número de recapturas $n_s(t)$ durante el período de duración τ centralizado en t es

$$\begin{aligned} n_s(t) &= FN_S(O) \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} e^{-(F+M+L)t} dt \\ &= \frac{2FN_S(O)}{(F+M+L)} e^{-(F+M+L)t} \sinh (F+M+L) \tau/2 \end{aligned}$$

El valor del seno hiperbólico equivale aproximadamente al de su argumento cuando este último es pequeño (menos de 0.5). En este estudio, se asume que este es el caso y puede demostrarse, *a posteriori*, que esta es una aproximación excelente. Por lo tanto

$$n_s(t) = F \tau N_S(O)e^{-(F+M+L)t} \quad (1)$$

Ahora, para peces marcados con doble marca, la tasa del desprendimiento de marcas es la misma que para los peces marcados con una marca (al no asumir sinergismo) pero, desde que hay dos marcas por pez, la tasa instantánea de cambio de la población es

$$\frac{dN_D(t)}{dt} = -(F+M+2L)N_D(t)$$

Consecuentemente, en cualquier momento t , la población de peces marcados con doble marca es

$$N_D(t) = N_D(O) e^{-(F+M+2L)t} \quad (2)$$

y, lo mismo que lo expuesto anteriormente, el número de recapturas de peces doblemente marcados con las dos marcas que permanecen en su lugar durante el período $(t - \tau/2, t + \tau/2)$ es

$$n_{dd}(t) = F \tau N_D(O) e^{-(F+M+2L)t} \quad (3)$$

Entré otras consecuencias de las ecuaciones (1) y (3), está el hecho de que los momentos de las recapturas de las marcas sencillas y de las marcas dobles, tienen una distribución exponencial. Esto se observó primero y se utilizó para recobros en un experimento de marcación común efectuado por Jackson (1937). El análisis dado por Chapman (1961), para un experimento ordinario de marcación, puede fácilmente extenderse al experimento de la marcación doble. Especialmente si F , M y L son constantes y si se dispone de los tiempos de recaptura, entonces una estimación no viciada de L es

$$L = \frac{(n_{dd} - 1)}{n_{dd} \bar{t}_{dd}} - \frac{(n_s - 1)}{n_s \bar{t}_s}$$

en donde \bar{t}_s = al tiempo promedio de recaptura de peces originalmente liberados con una marca, y

\bar{t}_{dd} = al tiempo promedio de recaptura de peces originalmente liberados con dos marcas y que retienen ambas marcas.

Esta es la mejor estimación posible, usando solamente la información de los recobros de las marcas sencillas, y de las marcas que han sido colocadas y devueltas como marcas dobles. La determinación del número de recapturas que se espera, de peces marcados doblemente pero que solo permanecen con una marca, no es tan sencillo como el de los dos tipos anteriores. Esto se debe a la disminución N_{DS} de los peces, proveniente de todas las causas, mientras que su número se agrega continuamente por la pérdida de una marca de peces doblemente marcados. En este caso, la tasa instantánea de cambio de la población de peces N_{DS} es

$$\frac{dN_{DS}(t)}{dt} = 2LN_D(O) e^{-(F+M+2L)t} - (F+M+L)N_{DS}(t)$$

en donde el primer término al lado derecho, derivado de la ecuación (2), es la tasa de adición de peces N_{DS} a la población. Se da el número de peces que permanecen con una sola marca en cualquier momento t , por medio de la solución a esta ecuación diferencial

$$N_{DS}(t) = 2N_D(O) e^{-(F+M+L)t} (1 - e^{-Lt})$$

Se encuentra que el número de las recapturas de estos peces durante el período t es

$$n_{ds}(t) = 2F \tau N_D(O) e^{-(F+M+L)t} (1 - e^{-Lt}) \quad (4)$$

La distribución de probabilidad de los momentos de recaptura de tales peces, *i.e.*, los marcados originalmente con dos marcas, pero que retienen ahora solamente una marca, pueden ser determinados por medio de la ecuación (4), pero no es tan simple como la distribución exponencial derivada de la ecuaciones (1) y (3). La estimación óptima que utiliza estos retornos, lo mismo que \bar{t}_S, \bar{t}_{DD} , permanece una cuestión pendiente.

Sin embargo, en cualquier perquería actual, las apropiaciones requeridas para este modelo ideal, se realizan rara vez, si es que acaso se realizan, y no por cierto en la pesquería del atún tropical en donde hay gran variación en la intensidad de pesca sobre períodos cortos de tiempo. Además M , que incluye pérdida debida a tales factores como la emigración, lo mismo que a la mortalidad natural, puede cambiar marcadamente de una estación a otra.

No obstante, las ecuaciones (1), (3) y (4) pueden usarse para que rindan un procedimiento de estimación que asegure tal constancia, únicamente sobre períodos cortos de tiempo.

1) Se deduce de las ecuaciones (1) y (3) que

$$\frac{n_{dd}(t) / N_D}{n_s(t) / N_S} = e^{-Lt}$$

por lo tanto

$$\log_e \frac{n_{dd}(t) / N_D}{n_s(t) / N_S} = -Lt = Y_{1t} \quad (5)$$

2) Se deduce de las ecuaciones (1) y (4) que

$$\frac{n_{ds}(t) / N_D}{n_s(t) / N_S} = 2(1 - e^{-Lt})$$

por lo tanto

$$\log_e \left(1 - \frac{n_{ds}(t) N_S}{2n_s(t) N_D} \right) = -Lt = Y_{2t} \quad (6)$$

3) Se deduce de las ecuaciones (3) y (4) que

$$\frac{n_{ds}(t)}{n_{dd}(t)} = 2(e^{Lt} - 1)$$

por lo tanto

$$\log_e \frac{2n_{dd}(t)}{n_{ds}(t) + 2n_{dd}(t)} = -Lt = Y_{3t} \quad (7)$$

Todas las cantidades al lado izquierdo de las ecuaciones (5), (6) y (7) pueden determinarse según los datos de los experimentos combinados de la marcación doble y la sencilla. Durante varios períodos de tiempo (no necesariamente consecutivos o uniformes en duración) en donde t es el punto medio de estos períodos, es posible calcular estas cantidades y regresarlas con tiempo. Consecuentemente, tres estimaciones separadas de L son determinables, cada una de las cuales es independiente de la intensidad de pesca, mortalidad natural y aún, como puede demostrarse, de la pérdida inicial de marcas. No importa a que riesgos de mortalidad (de pesca o natural) han sido expuestos los varios grupos; es esencial, únicamente que ambos sean y continúen siendo expuestos a los mismos riesgos. Difieren solamente en las características de las marcas y así la única apropiación esencial es que la pérdida de las marcas tome lugar a una tasa continua, *i.e.*, sigue una tasa exponencial de merma.

Para observar esto, una forma alternativa, es la de establecer un modelo basado en la probabilidad en vez de un modelo basado en la tasa de declinación. Se define

ϕ_t = probabilidad de que el pez sobreviva al principio del período ($t - \tau/2, t + \tau/2$), *i.e.*, período t

f_t = probabilidad de que el pez sea cogido en el período t

p_t = probabilidad de que una marca esté perdida hasta el período de tiempo t .

Entonces, el número que se espera de retornos en el período de tiempo t , en las diversas categorías es

Marcas sencillas: $N_S \phi_t f_t (1 - p_t)$

Marcas dobles, con retención de ambas: $N_D \phi_t f_t (1 - p_t)^2$

Marcas dobles, con retención solamente de una: $N_D \phi_t f_t 2p_t (1 - p_t)$

La apropiación de pérdida continua por el desprendimiento a razón de L significa que $1 - p_t = e^{-Lt}$, y se ve que al tomar razones y logaritmos, estos valores esperados conducen también a las ecuaciones (5), (6) y (7).

RESULTADOS

Los datos de los recobros de atún aleta amarilla marcado con marcas de dardo durante 1963, son empleados para estimar la tasa del desprendimiento de estas marcas, en esta especie de peces. Incluidos en el experimento hay 2616 peces liberados con una marca y 534 liberados con dos marcas, colocada una a cada lado de la segunda aleta dorsal. De los peces liberados con una sola marca, hubo 1704 recobros; de los peces liberados con dos marcas hubo 329 recobros que permanecieron con ambas marcas, y 69 que permanecieron solamente con una (durante los primeros 120 días de libertad).

El número de recobros en cada uno de los seis períodos de recobros consecutivos (cada uno de 20 días de duración) tanto de atunes aleta amarilla marcados con una o dos marcas, es presentado en la tabla debajo. Los retornos de los peces doblemente marcados, están separados sobre la base de si una o las dos marcas permanecen en el momento de la recaptura. También se dan en esta tabla los logaritmos naturales de las varias razones correspondientes a las ecuaciones (5), (6) y (7), que son usadas para el análisis. Estas están encabezadas por Y_{1t} , Y_{2t} y Y_{3t} respectivamente.

Días libres	$N_S = 2616$				$N_D = 534$		
	t	n_s	n_{dd}	n_{ds}	Y_{1t}	Y_{2t}	Y_{3t}
1- 20	1	1136	239	38	0.0301	-0.0856	-0.0764
21- 40	3	282	56	11	-0.0282	-0.1004	-0.0936
41- 60	5	133	16	8	-0.5290	-0.1594	-0.2231
61- 80	7	73	8	5	-0.6219	-0.1836	-0.2719
81-100	{ 10	50	4	4	{-0.4904	-0.2412	-0.3000}
101-120		30	6	3			

Segun estos datos, las regresiones de los cuadrados mínimos dan

- 1) según la ecuacion (6): $\hat{L}_1 = 6.498 \times 10^{-3}$ por día
- 2) según la ecuación (7): $\hat{L}_2 = 2.653 \times 10^{-3}$ por día
- 3) según la ecuación (8): $\hat{L}_3 = 3.465 \times 10^{-3}$ por día

Debe observarse, que estas estimaciones de L son los negativos de las gradientes de las líneas de regresión ajustadas a los datos de la tabla *a través del origen*. La apropiación de homocedasticidad ha sido hecha como con el ajuste corriente de los cuadrados mínimos, aunque puede también ser apropiado el considerar que las variancias aumentan como una función de tiempo porque el número de recobros está disminuyendo como una función

de tiempo. El período relativamente corto de tiempo comprendido aquí, hace difícil examinar esta cuestión en detalle. Todas estas determinaciones son libres de cualquier apropiación acerca del esfuerzo de pesca y la mortalidad natural, ya que los tres diferentes tipos de las recapturas de marcas, son todos hechos con el mismo esfuerzo.

Al regresar a la cuestión de la mejor estimación combinada de L , debe notarse que las estimaciones L_1, L_2, L_3 , están correlacionadas. Se designa por Σ la matriz variancia-covariancia de L_1, L_2, L_3 . Además se deja que σ^{ij} señale los elementos de Σ^{-1} . Entonces la función lineal de la variancia mínima de L_1, L_2, L_3 es $\sum_{i=1}^3 W_i \widehat{L}_i$ en donde los pesos W_i son determinados por las ecuaciones

$$W_1 = \frac{\sum \sigma^{1j}}{\sum_{i,j} \sigma^{ij}} \quad W_2 = \frac{\sum \sigma^{2j}}{\sum_{i,j} \sigma^{ij}} \quad W_3 = \frac{\sum \sigma^{3j}}{\sum_{i,j} \sigma^{ij}}$$

[cf. Cochran (1963) p. 183-185]. En esta situación W_1, W_2, W_3 no están necesariamente limitadas al intervalo (0, 1) como en el caso de la mejor combinación lineal de las estimaciones no correlacionadas. Aún más, la variancia de esta mejor estimación lineal es $\left(\sum_{i,j} \sigma^{ij} \right)^{-1}$

Para determinar los elementos de Σ observe que

$$\sigma_{ii} = \sigma^2(\widehat{L}_i) = \frac{\sum Y_{it}^2 + \widehat{L}_i \sum (Y_{it})}{\sum t^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum Y_{it} Y_{jt} - (\widehat{L}_i \widehat{L}_j) (\sum t^2)}{\sum t^2} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$$

Ya que $\sum t^2$ aparece en el denominador de todos los elementos de Σ , es conveniente ignorarlo al determinar W_1, W_2, W_3 .

Entonces para los datos presentados anteriormente, omitiendo el denominador

$$\Sigma = \begin{pmatrix} .13181 & -.00014 & .02025 \\ -.00014 & .00522 & .00464 \\ .02025 & .00464 & .00736 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} .0290 & .1632 & -.1767 \\ .1632 & .9623 & -1.0562 \\ -.1828 & -1.0562 & 1.1828 \end{pmatrix} \times 10^4$$

$$W_1 = 0.418 \quad W_2 = 3.080 \quad W_3 = -2.498$$

$$\widehat{L} = 0.00223 \quad \sum \sigma^{ij} = 0.0225 \times 10^4$$

$$\sigma_{\widehat{L}}^2 = \frac{(.1)^2}{.0230} \times 10^{-4} \times \frac{1}{184} = 0.242 \times 10^{-6}$$

Observe que el factor $\Sigma t^2 = 184$ debe introducirse en el cálculo de la variancia. También es de utilidad

$$\hat{\sigma}_{\hat{L}} = 0.000492 \text{ (base diaria)}$$

Sobre una base *anual* $\hat{L} = 0.814$

$$\text{y } \hat{\sigma}_{\hat{L}} = 0.180$$

La estimación de L (0.814) conforme se ha calculado aquí, es menor que la de Q (1.05 – 1.06) como ha sido determinada por Fink (1965a). Esto no es inesperado, ya que Q puede incluir otras pérdidas, que las del desprendimiento de marcas. Sin embargo, la diferencia es bastante pequeña para ser considerada insignificante a cualquier nivel realístico de comparación, especialmente en vista de la magnitud de $\hat{\sigma}_{\hat{L}}$.

LITERATURE CITED — BIBLIOGRAFIA CITADA

- Beverton, R. J. H. and S. J. Holt. 1957. On the dynamics of exploited fish populations. Min. Agri. Fish. Food, Fish. Invest. H. M. S. O., London, Ser. 2, Vol. 19. 533 p.
- Broadhead, G. C. 1959. Techniques used in the tagging of yellowfin and skipjack tunas in the eastern tropical Pacific Ocean during 1955-1957. Proc. Gulf and Carib. Fish. Inst., 11th Ann. Session: 91-99.
- Chadwick, H. K. 1963. An evaluation of five tag types used in a striped bass mortality and migration study. Calif. Fish and Game, 49(2): 64-83.
- Chapman, D. G. 1961. Statistical problems in dynamics of exploited fisheries populations, p. 153-169. *In* Proc. Fourth Berkeley Symp. on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley, 1961.
- Cochran, W. G. 1963. Sampling techniques. 2nd ed. John Wiley and Sons, Inc., New York. 413 p.
- Davidoff, E. B. 1965. Estimation of year class abundance and mortality of yellowfin tuna in the eastern tropical Pacific [in English and Spanish]. Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull., 10(6): (*in press*).
- Fink, B. D. 1965a. Estimations, from tagging experiments, of mortality rates and other parameters respecting yellowfin and skipjack tuna [in English and Spanish]. Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull. 10(1): 1-82.
- . 1965b. A technique, and the equipment used, for tagging tunas caught by the pole and line method. J. du Conseil, 29(3):335-339.
- Gulland, J. A. 1963. On the analysis of double tagging experiments, p. 228-229. *In* North Atlantic fish marking symposium. Spec. Pub. No. 4, I. C. N. A. F., Dartmouth, Canada.
- Hennemuth, R. C. 1961. Year class abundance, mortality and yield-per-recruit of yellowfin tuna in the eastern Pacific Ocean [in English and Spanish]. Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull., 6(1):1-51.
- Jackson, C. H. N. 1937. Some new methods in the study of *Glossina morsitans*. Proc. Zool. Soc. Lond. [for 1936]. Part 4:811-896.
- Schaefer, M. B. 1961. Report on the investigations of the Inter-American Tropical Tuna Commission for the year 1960, p. 40-183 [in English and Spanish]. *In* Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Annual Report for 1960, La Jolla, California.
- . 1962. Report on the investigations of the Inter-American Tropical Tuna Commission for the year 1961, p. 44-171 [in English and Spanish]. *In* *ibid.*, Annual Report for 1961, La Jolla, California.
- , B. M. Chatwin, and G. C. Broadhead. 1961. Tagging and recovery of tropical tunas, 1955-1959 [in English and Spanish]. *Ibid.*, Bull., 5(5):341-455.