

**INTER-AMERICAN TROPICAL TUNA COMMISSION
COMISION INTERAMERICANA DEL ATUN TROPICAL**

Bulletin — Boletín

Vol. 10, No. 7

**CURRENTS OBSERVED IN PANAMA BAY
DURING SEPTEMBER-OCTOBER 1958**

**CORRIENTES OBSERVADAS EN LA BAHIA DE PANAMA
DURANTE SEPTIEMBRE-OCTUBRE 1958**

by — por
Edward B. Bennett

La Jolla, California
1965

CONTENTS — INDICE

ENGLISH VERSION — VERSION EN INGLES

	Page
INTRODUCTION.....	399
PHYSIOGRAPHY OF THE GULF OF PANAMA AND PANAMA BAY.....	399
REVIEW.....	399
The net currents.....	399
The tidal currents.....	400
THE OBSERVATIONS.....	401
The current measurements.....	401
Tides at Balboa during the survey period.....	401
Winds at Balboa during the survey period.....	402
REDUCTION OF THE DATA.....	403
RESULTS.....	405
INTERPRETATION OF RESULTS.....	406
Definitions and general assumptions.....	406
The net currents.....	408
The tidal currents.....	411
SUMMARY.....	419
<hr/>	
FIGURES — FIGURAS.....	421
<hr/>	
TABLES — TABLAS.....	429

VERSION EN ESPAÑOL — SPANISH VERSION

	Página
INTRODUCCION.....	432
FISIOGRAFIA DEL GOLFO DE PANAMA Y DE LA BAHIA DE PANAMA.....	432
EXAMEN.....	433
Corrientes netas.....	433
Corrientes de las mareas.....	433
LAS OBSERVACIONES.....	434
Mediciones de las corrientes.....	434
Mareas en Balboa durante el período de observaciones.....	435
Vientos en Balboa durante el período de observación.....	436
REDUCCION DE LOS DATOS.....	436
RESULTADOS.....	439
INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS.....	440
Definiciones y suposiciones generales.....	441
Las corrientes netas.....	443
Las corrientes de las mareas.....	446
RESUMEN.....	455
<hr/>	
LITERATURE CITED — BIBLIOGRAFIA CITADA.....	457

CURRENTS OBSERVED IN PANAMA BAY DURING SEPTEMBER-OCTOBER 1958¹

by
Edward B. Bennett

INTRODUCTION

During the period extending from late August to early October 1958 the United States Navy Hydrographic Office (now the United States Oceanographic Office) undertook a program of current observations in the western part of Panama Bay. The specifications of the survey called for half-hourly monitoring of currents at three depths at each of six locations, one for thirty days and five for five days. Although not all these objectives were realized because of instrument malfunctions and failures, sufficient data were collected at five stations to provide a fairly detailed description of the current pattern as it existed at the times of observation.

This report is concerned first with a discussion of those data and the procedures used to reduce them to the tidal and net current components and second, with the effects on the current pattern of tidal amplitude, bottom topography and bottom friction.

PHYSIOGRAPHY OF THE GULF OF PANAMA AND PANAMA BAY

Cape Mala on the west and Punta Piñas on the east are usually taken as the limits of the Gulf of Panama (Figure 1). The line between these points, running nearly east-west, is about 200 km long, and within this line the Gulf recedes to the northward 170 km, with Panama Bay and the Pacific entrance to the Canal at its head. Between the entrance points the 185-m (100-fm) curve trends slightly to the northward; the depths outside increase rapidly to 1,000 m and more, while within they decrease gradually to the head. The gentle shoaling is interrupted by Las Perlas Islands which lie within the Gulf, east of its center, and within the 50-m contour. To the west of these islands the bottom contours penetrate farthest northward, forming a shallow trough directed toward the head of Panama Bay.

In the western part of Panama Bay (Figure 2) the smooth mud bottom has the small slope of about 1 m/km at depths of about 50 m, and only about twice that on the periphery. Thus the extensive mud flats at the head of Panama Bay and in Chorrera Bay are consistent with the generally gently sloping topography of the area.

REVIEW

The net currents

Net currents in Panama Bay are well known and are reported in many places in the literature, and on charts. The following are quoted

¹ This research was supported in part by the U. S. Atomic Energy Commission Contract No. AT(11-1)-34, Project 99 with the Institute of Marine Resources of the University of California.

from H. O. No. 174, *Sailing Directions for South America* (U. S. Hydrographic Office 1938):

“A steady current has been found to set to the northward after passing Cape San Lorenzo², with a velocity of 24 to 36 miles per day, extending off-shore about 60 miles. This current sets along the coast, following the direction of the land, enters and makes a complete circuit of the Gulf and Panama Bay. [p. 400]

“There is a current of variable strength, but fairly constant in direction, setting to the westward across the head of Panama Bay and thence southward between Taboga Island and the mainland.” [p. 417]

Thus the net flow in the Gulf and Panama Bay is part of a larger current system which has been called the Colombia Current (e.g. Cromwell and Bennett 1959).

The tidal currents

Fleming (1938) showed that the tides in the Gulf of Panama and along the Pacific coast of Central America are of the semi-diurnal type associated with a standing wave, so that maximum tidal currents, on both flood and ebb, occur at the half-tides. Within the Gulf the range of the tide varies from 5 ft (1.5 m) at minimum neaps to 22 ft (6.7 m) at maximum springs. In Panama Bay the range of tide is 19 per cent more than at the entrance to the Gulf; Fleming showed that this can be attributed to the effect of the shoaling bottom on the standing wave. Moreover, he used the equation of continuity to demonstrate that at any position within the Gulf the maximum depth-mean tidal current could be expressed as a function of depth, distance from shore, and tide range.

Previous observations of tidal currents in Panama Bay are discussed in H. O. 174:

“Current-direction observations were made at three locations in Panama Bay between Taboga and Flamenco Islands. Those observations indicate that the general direction of tidal current is approximately parallel to the canal axis³. Surface currents of an incoming tide were found to be more from the eastward, especially at the observation point nearest Flamenco Island, indicating that tidal currents are affected by winds⁴ and the coastwise current in Panama Bay. The maximum current velocity observed in this section of the bay was less than 0.6 knot. [p. 417-418]

² Cape San Lorenzo, Ecuador (1°S, 80°50'W)

³ The axis of the Pacific end of the Panama Canal is aligned at about 330-150°T.

⁴ The reason for this is not stated.

"Between Taboga and Otoque Islands the tidal currents, both flood and ebb, vary greatly in direction at different stages of the tide . . ." [p. 417]

THE OBSERVATIONS

The current measurements

The five locations at which current observations were made in 1958 and the designation of those positions by alphabetic character are shown in Figure 2. In Table 1 is a summary of observational information about these current stations.

At each station a buoy was anchored; from it were suspended three impeller-type Roberts Current Meters (Roberts 1952), one at 6 ft below the sea surface, one at mid-depth, and one at about 20 ft above mean low spring chart depth to prevent contact with the bottom at low tide.

The signals from the current meters were relayed by a radio transmitter on each buoy to a shore-based monitor station where they were recorded on chronograph tape, scaled to the nearest tenth of a knot and degree, and logged. Each buoy was monitored half-hourly for about three minutes. That was the time required for a sequencing switch to switch in all three meters. When doubt existed as to the results of the final record a second three minute record was taken. The monitor station, initially on Flamenco Island, was moved to Taboga Island after completion of Station B.

Signals corresponding with current speeds of about 0.2 knots or less usually were not recognizable, and were entered as blanks in the data record. However, a non-recognizable or missed signal due to sporadic instrument malfunction or transmission difficulty was also entered as a blank. For this reason some editing of the data was necessary prior to the analysis described below. Thus sometimes it was possible to decide on the basis of the nature of the record before and after a blank as to whether it was due to the current being less than the threshold value or to some difficulty in the recording system.

Although observations at Station A, the thirty-day station, were made during the period 31 August through 3 October with only a few short gaps in the record due to instrumentation difficulties, the length of usable record, that is, the record with currents more or less consistently above the threshold value of 0.2 knots, was short and limited to the period 13-15 September. For the four other stations the usable records were nearly as short, the maximum length being about 5.5 days for Station B (Table 2).

Tides at Balboa during the survey period

The range of the tide (the height difference between successive low

and high waters, and vice versa) predicted for Balboa (U. S. Department of Commerce 1957) during the survey period is shown as a smoothed curve in the upper part of Figure 3. The tidal range varied markedly, attaining the minima of 7.5 ft on 8 September, 9.5 ft on 22 September, and 8 ft on 7 October, and the maxima of 20 ft on 16 September and 15 ft on 29 September. As well as this general changing with time of the tidal amplitude, there were during the times of useful observation at each station some differences between the flood and ebb halves of the tidal cycle. This can be seen in Table 2 which contains a listing of the mean range and duration, and the mean rate of change of sea level, for the flood and ebb tides, as determined from the data given in the predicted tables (*ibid.*). In addition, in Table 2 there are for each current station the time-date interval of usable record, the number of tidal cycles, and the minimum, maximum, and mean tidal range. With the exception of Station A at which the mean range of flood and ebb were equal, the range of the flood exceeded that of the ebb. This difference is due to the fact that the tidal range was changing monotonically during each of the observation periods, and to the particular phase of the tide during which observations were started. Thus, for example, if observations over an integral number of tidal cycles with increasing tidal range begin during an ebb tide, then the mean range of the flood exceeds that of the ebb for the period of measurement. This was exactly the set of conditions at Station B. For Stations C, D, and E the range decreased but measurements were started on flood tides, so again the mean range of flood exceeded that of the ebb. The observations at Station A were made under conditions similar to those of Station B, but started and ended with ebb tides so the two mean ranges were equal. The mean duration of the ebb tide exceeded that of the flood at all stations except Station B. This was due only to the nature of the tides during the survey period, for which as a whole this condition was generally true. The usually larger range of flood tides and longer duration of ebbs combined to make the mean rate of change of sea level (range divided by duration) bigger for floods than for ebbs during observations at all current stations. This is noteworthy because (as is discussed below) the relative strength of tidal currents is directly proportional to the rate of change of sea level. Therefore, aside from other conditions that the currents must satisfy, the observed tidal currents would be expected to be relatively strongest at Station A during flood tides, and weakest at Stations D and E during ebbs.

Winds at Balboa during the survey period

Winds at Balboa during the months of September and October are usually light and variable (Schaefer, Bishop and Howard 1958). Therefore the light winds which prevailed throughout the survey period (Figure 3, lower part) are consistent with average conditions. Although about 95 per cent of the time the wind was from either the W-NW-N or SW-S-SE sectors, there were only two days on which usable current observations

were made that the daily wind exceeded 100 miles/day (about 4 mph) from either sector.

REDUCTION OF THE DATA

The choice of the procedure used to reduce the current observations to the tidal and net current components depended on the apparent reproducibility or precision of observations at a particular phase of the tide, measured over several tidal cycles, and on which aspects of the flow pattern could be investigated with the data.

A cursory examination of the data yielded the trivial result that tidal motion is an important component of the currents in Panama Bay. Some preliminary plots showed two more facts: first, that net currents existed which were of the same order of magnitude as the maximum tidal currents, and second, that the net currents were not steady, but were subject to increases or decreases in magnitude over periods ranging up to several days. Both of these were anticipated on the basis of the quotations given above. It was necessary, therefore, to attempt to estimate the net currents as functions of time before proceeding with the extracting of the tidal motions from the observations.

Because the circulation in the Gulf of Panama is known to be sensitive to the local surface wind stress (Forsbergh 1963), an attempt was made to correlate the periods of relatively high and low net current with the winds observed at Balboa. That there was no correlation can perhaps be attributed to the fact that the survey period was one of weak and variable winds. This does not discount the possibility that the state of the wind at some other place, say in the middle of the Gulf of Panama, may be a better index of net current in Panama Bay during periods of light wind at Balboa.

An indication of the fact that tidal amplitude may be important is given by the usable record from Station A which was made during the period 13-15 September, when the tidal range was 17 to 20 ft. This was the only part of the record with currents more or less consistently stronger than the threshold value, and therefore was the only piece of record amenable to analysis for components of currents.

Further analysis for the time-dependency of the net currents was frustrated by the shortness of the usable records from the five stations, and by what must be considered as an inherent variability in the current itself or one introduced by the measuring system (lateral motion of the buoy from which the current meters were suspended, or oscillation of the meters in a horizontal plane could introduce variability in the observations). This was unfortunate, for it required that the analysis for the tidal motions take the form of averages over several tidal periods, that is, over the entire length of the usable record in all cases, to increase the

probability of eliminating the varying net currents. At the same time, the investigation for an anticipated relationship between maximum tidal currents and range of the tide was precluded. In spite of the shortness of the periods of observations at the five stations, there were changes in tidal range which might have had a detectable influence on currents. For example, during the 4.5 days of observation at Station C the range decreased steadily from 14 to 9 ft. Consequently, a corresponding change in the magnitude of the maximum tidal current would be expected (perhaps the change would be relatively greater, especially near shore, because of the different areas of the extensive mud flats on the periphery of Panama Bay that would be covered by tides of different heights). The result was, therefore, that the analysis for the tidal motion was limited to determining the *mean* tidal motion in the presence of the *mean* net current during each period of observation.

The procedure for separating the tidal and net motions was as follows: the *time* difference between successive low and high waters (or high and low waters) predicted for Balboa was divided into ten equal intervals. Thus a complete tidal cycle was divided into twenty intervals or *tide stages*. A shift of one-half interval was introduced so that the center of the first tide stage corresponded with low water, and the center of the eleventh interval, with high water. Next, the observations from each current meter were classified according to tide stage by the date and time of observation. Because observations were made half-hourly, there were usually twenty-five current observations per period of the semi-diurnal tide (12 hr 25 min) to be divided among the twenty stages, so that in any tidal cycle there was at least one current observation per tide stage, with two falling in about every fourth stage. In those cases where two successive observations were classified in the same tide stage, the mean of the two vectors was determined and used for that stage. This system was chosen so that for any particular tide stage, averages over several tidal cycles or days of record would tend to be representative of conditions at the mid-point of that stage.

The next step was the determining of the vector mean total current for each tide stage, over the length of usable record. *Total current* means the vector sum of the tidal and net current components. It was here that the possible effects of changing net current, of the apparent inherent variability in current, or of changing tidal amplitude were indicated. At some locations the group of current vectors to be averaged for a particular tide stage had a range in direction as large as about 70 degrees, and a range in speed up to 0.5 knots (0.25 m/sec). Usually the more westerly (on-shore) currents were the stronger. In spite of these variations the mean total current vector was determined for each tide stage if there were three or more vectors listed for that stage in the usable record, and if the number of the vectors listed was larger than the number of observations of currents of 0.2 knots or less, which, as was mentioned above, were entered

as blanks in the data record. In the cases in which there were both vector and blank listings and the number of the former was the larger, the latter were included in the averaging process by arbitrarily assigning a current of magnitude 0.2 knots and direction equal to the mean of the listed directions. This undoubtedly introduced bias of some sort into the analysis, but was considered more desirable than the two alternatives of either making the magnitudes zero, or ignoring the observations. When the number of blanks exceeded the number of vectors listed for a tide stage the mean total current was not determined.

RESULTS

The end-points of all the total current vectors which could be calculated for each depth of observation at each current station are shown in Figure 4. For a complete set of total current vectors there are twenty points. The circular hatched area or part thereof which appears in some of the plots is the threshold region of current speed 0.2 knots or less. Thus the center of the threshold region is the origin of the plot. The end-points of the total current vectors (filled circles) are joined in an order according to tide stage by a solid line if the succession of points is consecutive, or by a broken line if one or more points is missing. The line drawn between any two points is not always the shortest because an attempt was made to join the points in a manner such that the reader could trace successive points through the tidal cycle. As an aid in this respect the tide stages corresponding with low water (L), half-tide flood (F), high water (H), and half-tide ebb (E) at Balboa have been annotated.

The lack of data from three current meters was apparently due to either of two reasons. At Station B the meters at 6 and 20 ft depth below the sea surface appeared to be operational throughout the period of measurement but the currents there were so weak that most (at least 80%) of the signals from the meters were indistinguishable from background noise. On the other hand, at E80 apparently good measurements of strong currents were made during the first two tidal cycles of the observation period at that station, but after that instrument failure seemed to occur.

The plots of the end-points of the total current vectors in Figure 4 are the *tidal current figures* and the centers of those figures are the end-points of the corresponding *net current vectors*. The vector difference between any point of the tidal current figure and the net current vector is the *tidal current* at the tide stage corresponding to the point.

All of the tidal current figures have a long dimension and for nearly all of them it is oriented approximately along 330°-150°T. The only marked exception is that for A40 which has a northeast-southwest alignment. There is, however, a large variation in size and form of the figures.

The maximum dimension of the figures ranged between 0.35 knots (0.18 m/sec) for A20 and 1.34 knots (0.75 m/sec) for C40, while in form the range was that from near-elliptical for C40 to near-random for D70. Another difference which can be seen best in the essentially elliptical figures is that during a tidal cycle the tidal current vector rotated clockwise in some cases (C6 and E6) and counterclockwise in others (A6, C40 and D6).

The net current vectors were estimated from each plot in Figure 4 (except that for E80 which is based on data from only two tidal cycles) and are shown at the corresponding locations in Figure 5. All the measured net currents were directed more or less along the isobaths and conformed with the counterclockwise circulation in Panama Bay that was discussed earlier. Speed increased with distance offshore, or with water depth. At the inshore Stations A, B and C the speed was about 0.35 knots (0.18 m/sec) while offshore at D and E it was about 0.7 knots (0.35 m/sec). The net current varied with depth at each station but the vertical distribution was never the same for any two locations. At Stations A and D speed decreased with increasing depth but the vector rotated to the right at A and to the left at D. At Station C the mid-depth current was the weakest and was directed offshore relative to the two other measurements, while at E the mid-depth current was the strongest and had a relative on-shore component. As previously discussed only the currents at 40 ft at Station B were strong enough to be recorded; this means that the *net* current was strongest at the deepest meter.

INTERPRETATION OF RESULTS

In the following paragraphs some explanations of the observed current distributions are formulated on the basis of simple physical models but, because of the variability in the observations, only the most evident characteristics of the currents are treated.

Definitions and general assumptions

The following definitions or quantities are used throughout the discussions:

x	}	Coordinates of a right-handed system with z positive upward, and x positive either eastward or along shore, and y positive either northward or on shore. The origin for the z -axis is in the sea surface which would obtain in the absence of currents, tide-producing forces, and surface stress; the origin for the x - and y -axis is specified in each discussion
y		
z		
t		Time (sec or hr)
$u(x, y, z, t)$	}	Components of velocity (m/sec) in the x -, y - and z -directions, respectively
$v(x, y, z, t)$		
$w(x, y, z, t)$		

$\zeta(x, y, t)$	Departure of sea level (m) from $z = 0$
$b(x, y)$	Depth to bottom (m) measured from $z = 0$
ρ	Water density, assumed uniform
g	Acceleration of gravity, 9.8 m/sec ²
f	Coriolis parameter, 2.23×10^{-5} /sec in Panama Bay, assumed constant

The origin of time is taken to be simultaneous with a low water at Balboa.

For most discussions it was convenient to make use of the horizontal components of the depth-mean current which are defined as

$$\bar{u}(x, y, t) = \frac{1}{\zeta + b} \int_{-b(x, y)}^{\zeta(x, y, t)} u \, dz \quad (1)$$

$$\bar{v}(x, y, t) = \frac{1}{\zeta + b} \int_{-b(x, y)}^{\zeta(x, y, t)} v \, dz$$

The form of the equations of motion used to discuss each characteristic of the currents usually is different for each problem and therefore each is given below in the appropriate place. For all cases, however, the equation of continuity had to be satisfied and it was used in an integrated form. For water of uniform density the equation of continuity for an element of volume is

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z, t) + \frac{\partial w}{\partial z}(x, y, z, t) = 0$$

Integration of this from the bottom to the sea surface, transformation according to Leibniz's rule (Osgood 1935), and substitution of (1) yields

$$\frac{\partial}{\partial x}[(\zeta + b)\bar{u}] + \frac{\partial}{\partial y}[(\zeta + b)\bar{v}] = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (2)$$

Integration of the differential form of the hydrostatic equation from any depth z to the sea surface gives

$$p(\zeta) - p(z) = \rho g(z - \zeta)$$

If the sea level pressure $p(\zeta)$ is assumed to be constant then, because density is uniform, the components of the horizontal pressure gradient force at any depth z are

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(z)}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(z)}{\partial y} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (3)$$

In words, the horizontal pressure gradient force at any depth in water of uniform density is directly related to the slope of the sea surface above, and is the same for all depths.

Any attempt to account fully for the influence of friction in a hydrodynamics problem is hindered by the present limited state of knowledge of turbulent flow. For this discussion, however, this is not a serious restriction; what is most important is to realize that frictional influences do exist, and to allow for them in some way. Here only the effect of bottom friction will be considered, and it will be taken into account by assuming that a constant vertical coefficient of eddy viscosity exists for the flows under investigation. This is perhaps a meaningful step to take for study of a steady turbulent motion, but may in fact be quite artificial for investigation of periodic motion such as is associated with tides in shallow water (Townsend 1956, p. 107).

In the discussions which follow the net current is considered in the absence of tides and tide-producing forces, after which the tidal motion is investigated in the absence of net current. This partition of motion is useful for the consideration of frictionless flows, but is an artifice for studies involving the effect of friction. Although some changes in the net current during a tidal cycle would appear to an observer to be due to tidal effects, and in fact can be treated as such, at any time there is interaction between the turbulence and the *total* current (the vector sum of the net and tidal components) so the separation of the motion into net and tidal parts is in fact fundamentally wrong. However, of interest here is only some indication of the effect that various forces have on particular motions and to this extent partition is acceptable.

The net currents

In the absence of tides the shape of the sea surface is a function of position only, and the equation of continuity (2) is then

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} [(\zeta + b)\bar{u}] + \frac{\partial}{\partial y} [(\zeta + b)\bar{v}] \quad (4)$$

When the influence of friction is negligible and geostrophic flow exists, a balance exists between the Coriolis force and horizontal pressure gradient. Then, making use of (3),

$$0 = f\bar{v} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5)$$

and

$$0 = f\bar{u} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

Here the depth-mean values of the velocity components were written because, since the pressure gradient is uniform with respect to depth, the components of velocity must be also. For a net current of about 1.0 m/sec, which is stronger than any observed in Panama Bay, the corresponding slope of the sea surface is only 2.3×10^{-6} . The minimum slope of the bottom, measured normal to the observed net flows, is about 10^{-3} . Then $\zeta(x, y)$ can be neglected in the equation of continuity so that (4) becomes

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} (b\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (b\bar{v}) \quad (6)$$

When the expressions for the depth-mean components of velocity derivable from (5) are substituted into this and the variation of Coriolis force with latitude is neglected then, as is demonstrated by Lamb (1932, Art. 207), the result is

$$0 = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} \quad (7)$$

This condition is satisfied only if the contour lines of the sea surface are everywhere parallel to the bottom contours. In turn, because the flow is parallel to the contours of the sea surface, it must be parallel to the bottom contours. However, this is arbitrary to the degree that there are two possible directions of flow. Suppose for example that the bottom shoals only northward. Then (7) is satisfied if sea level rises or falls, or alternately rises and falls, in the same direction and therefore at any position either eastward or westward current is possible. Which direction the current would assume at any particular location requires prior knowledge of the slope of the sea surface there.

In the development just completed the influence of friction was neglected. Now this will be included but for the special case in which there is generally westward flow parallel to a straight zonal coast with land to the north and water to the south. If the hypothetical coast encircles the world at its particular latitude then the equation of continuity (6) is satisfied everywhere only if \bar{v} is zero because there can be no depth-mean flow normal to the coast. When the frictional forces are included equations (5) become

$$0 = fv - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8)$$

$$0 = -fu - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

where K , the vertical coefficient of eddy viscosity, is assumed to be constant. When the first of these is integrated with respect to depth and the condition $\bar{v} = 0$ is imposed, then the result is

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{K}{\rho b} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} (0) - \frac{\partial u}{\partial z} (-b) \right\}$$

That is, a pressure gradient exists parallel to the coast in order to overcome the effect of friction. Integration of the second of (8) yields

$$\bar{u} = - \frac{g}{f} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{K}{\rho b f} \left[\frac{\partial v}{\partial z} (0) - \frac{\partial v}{\partial z} (-b) \right]$$

Thus the depth-mean current parallel to the coast will be different from its value in the frictionless case (the first term on the right-hand side) when current normal to coast exists. More details of this type of flow can be seen from examination of an exact solution to the simultaneous equations (8) which was obtained under the following set of conditions:

- a. the current at the bottom is zero;
- b. the depth-mean current normal to the coast (\bar{v}) is zero;
- c. when the influence of friction is small ($K = 0$) the flow pattern becomes that of the frictionless case;
- d. the slope of the bottom is small; and
- e. the magnitudes of ρf , K , b and $g \partial \zeta / \partial y$ are specified. The velocity in the frictionless case is

$$U_0 = - \frac{g}{f} \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

so that specifying the meridional pressure gradient leads to a solution of (8) in terms of U_0 . The equations of solution are too elaborate to be given here, but some results for various values of the coefficient of eddy viscosity are presented in Table 3 and Figure 6. The water depth for the calculation was 20 m. In Table 3 it is seen that the greater the influence of friction (the higher the value of eddy viscosity) the larger is the zonal pressure gradient and the smaller is the depth-mean zonal component of velocity. Such monotonic changes are not characteristic of the vertical distribution of currents (Figure 6); the largest values of the component perpendicular to the coast occur at some value of the eddy viscosity intermediate to $K = 0$ and $K = \infty$, for both of which this component is zero at all depths. In all real cases, however, the current near the bottom has an offshore component while a compensating onshore flow exists in the upper part of the water column, when U_0 is westward. If U_0 is eastward then flow is directed onshore near the bottom and offshore at the surface. In the lower part of Figure 6 the end-points of the total current vectors for each vertical distribution are plotted. It can be seen that when the frictional influence is large ($K = 100$) the magnitude of the horizontal current vector changes appreciably with each increment of depth, whereas for a small value of the coefficient of eddy viscosity ($K = 1$) the vectors in the upper part of the water column are essentially the same. This means that in order to observe the effects of a small frictional influence measurements should be made very nearly to the bottom.

In summary, when frictional influences are negligible the net current follows the bottom contours and at any position is uniform from the sea surface to the bottom, but need not be uniform laterally. When bottom friction is important a pressure gradient exists in the direction of mean flow. In turn, current in the direction of the mean flow is retarded near the bottom and a cross circulation exists in which there is onshore flow at the surface and offshore flow near the bottom. How well the observed net currents in Panama Bay (Figure 5) satisfy either model is questionable. Flow is generally along the isobaths at all depths at each current station (except Station C where it is across the bottom contours) with some variation in speed and direction at each. Only the vertical distributions at the offshore Stations D and E appear to be what is expected when bottom friction is important. At the inshore Stations A and C local topography may be a dominant factor in the determination of the vertical distribution of net current; then a more complicated model which includes the effects of lateral friction and the inertial accelerations would have to be used.

The tidal currents

In the Review it was pointed out that the tides in the Gulf of Panama and Panama Bay can be treated as standing waves. The physical significance of this fact is that nearly all of the energy of the incoming tidal wave must be reflected from the bottom and periphery of the area, with little loss due to frictional effects, or else a standing wave could not exist. But part of the discussion below is concerned with an evident effect of friction in the observed tidal motions. It seems reasonable to assume, therefore, that although friction has an observable effect on the tides in the area, the relative effect from the point of view of the energy budget is small, and that there will be no loss of generality if the tide is treated both as a standing wave and as a motion influenced by friction.

Deductions from the equation of continuity

For a region over which the tide is essentially simultaneous an accurate description of the depth-mean tidal current at any location can be obtained from the equation of continuity if the bottom profile in the direction of flood and ebb and the tidal amplitude are known. To illustrate this two simple examples will be used.

When the y -axis is taken in the flood-ebb direction (positive onshore) the equation of continuity (2) is

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\zeta + b) \bar{v} \right] = - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (9)$$

Integration from $y = 0$, which is distance L offshore as measured at half-tide, to the waterline $y_b(t)$ of the shore and subsequent use of Leibniz's rule yields

$$\bar{v}(0, t) = \frac{y_b(t)}{b + \zeta(t)} \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t} \quad (10)$$

In words, the instantaneous depth-mean tidal current in the flood-ebb direction equals the product of the distance to the waterline on the shore and the rate of change of sea level, divided by the total depth.

Case I: The bottom shoals uniformly from mean depth b at $y = 0$ to zero mean depth at $y = L$, the shore having the same slope. Then

$$y_b(t) = \frac{L}{b} (b + \zeta(t))$$

and (10) becomes

$$\bar{v}(0, t) = \frac{L}{b} \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t} \quad (11)$$

In particular, if $\zeta(t) = -\frac{R}{2} \cos \sigma t$

then $\bar{v}(0, t) = \frac{\sigma LR}{2b} \sin \sigma t$

Thus when the bottom profile is a linear function of distance the tidal current corresponding to a pure harmonic tide is itself a pure harmonic function of time which is one quarter period ahead of the tide.

Case II: The bottom is of uniform depth b over the distance L between the origin offshore and a vertical "beach." Here $y_b(t) = L$ so that with $\zeta(t)$ the same as before (10) yields

$$\bar{v}(0, t) = \frac{\sigma LR}{2b - R \cos \sigma t} \sin \sigma t$$

This differs from the Case I expression only because of the harmonic term in the denominator. The effect of the cosine term is to skew the sine curve of Case I by advancing the time of maximum flood current and retarding that of maximum ebb current, while leaving the times of zero current unaffected.

For the two cases curves were computed using $L = 20$ km, $R = 7$ m, $b = 15$ m, and $\sigma = 0.506$ /hr (angular frequency of semi-diurnal tide), a set of conditions considered to be representative of the extreme which would be encountered in Panama Bay. In spite of this the departure of the Case II curve from the sine curve was never large, for the time shift of the maximum and minimum velocities was only 0.465 hr (28 min) and the maximum difference in speed at any time never exceeded 0.08 m/sec (compare with maximum speed of 0.66 m/sec).

The reason for the examination in detail of the two cases of simple topography is that each is a limiting form of the bottom profile in that part of Panama Bay in which the current measurements were made; that

is, any profile lies somewhere between the two simple topographies regardless of what form it is. Most profiles are in fact approximately parabolic but everywhere of small curvature, so that they more closely correspond with the linear bottom profile. Therefore there will be no significant differences from expected depth-mean currents if for the purposes of calculation the bottom in Panama Bay is assumed to have a uniform slope, and in fact this is assumed for the following discussion.

For a simple harmonic tide the maximum rate of change of sea level occurs at the half-tides and is 1.57 times larger than the mean rate of change of sea level (range divided by duration). Values of the latter have already been discussed with regard to inequalities between the flood and ebb halves of the tidal cycle during the survey period (see Table 2). If it is assumed that each half of a tidal cycle is harmonic, even though differences between halves exist, then these data can be used with equation (11) to compute the maximum expected depth-mean currents during flood and ebb at each station. Equation (11) becomes

$$\bar{v}_{\max} = 0.436 \frac{L}{b} \cdot \frac{R}{D} \text{ m/sec}$$

with L in km, b and R in m, and duration D in hr. The expression is complete except for sign; current is taken to be positive during floods and negative during ebbs. Although the relation is simple, prior knowledge of the directions of the maximum tidal currents is required before it can be used. Without that knowledge only the *lowest* expected values of maximum tidal current can be computed at any position offshore, for L would then be taken as the minimum distance to the shore. In such a case the only data required are L and b from a chart and R and D from predicted tide tables.

The flood-ebb direction in Panama Bay has already been established as $330^\circ - 150^\circ\text{T}$. Using this fact the distance L for each station was measured from a chart and, together with the corrected chart depth b and the mean rates of change of sea level (Table 2), used to calculate the expected values of maximum depth-mean tidal current (Table 4). At Stations B, C and D these compare favorably with the "observed" maximum depth-mean currents which were estimated by averaging the half-lengths of the maximum dimension of the tidal current figures for all depths, but at Station A the expected value is about fifty per cent larger than the observed value and the reverse is true at Station E. There is a possibility that current at Station A is affected by the proximity of Taboguilla Island so that shoreward of that station part of the water exchange during a tidal cycle could be from the northeast or south as well as along $330^\circ - 150^\circ\text{T}$; then current at Station A would be weaker than expected. Why such strong currents were observed at Station E is not understood.

As an application of these results, together with results from the discussion of net currents, the expected depth-mean currents were computed

for the maximum spring range of 22 ft (6.7 m). In Figure 7 are shown the currents expected at the half-tides (F and E) and high and low water (H and L) when the net current of 0.35 knots (0.18 m/sec) at the inshore stations and 0.7 knots (0.35 m/sec) at the offshore stations. The direction of the net current was taken as the mean of the observed directions (Figure 5). Although the currents in Figure 7 are representative of the extreme tidal condition which occurs in Panama Bay, the same pattern exists for any tide range. Thus if the net current has a component in the flood direction of 330°T , currents during an incoming tide are stronger than currents during an ebb (Station B); when the net current has a component along 150°T the ebb currents are the stronger (Stations A, C, E); and when the net current is approximately normal to the flood-ebb direction the currents during the two halves of a tidal cycle have equal strength (Station D).

From these results it is expected that observations in the eastern part of Panama Bay would show that the flood currents would be everywhere stronger than ebb currents.

Alternating tidal motion with bottom friction

In the preceding section the depth-mean tidal currents were determined from application of the equation of continuity; it could also be said that the frictionless tides were discussed there. In addition, however, those results are applicable to a discussion of frictional effects because as sea level rises or falls there is a corresponding onshore or offshore flow of water, regardless of what effect friction has. Thus relative to the stand of sea level the depth-mean currents will be the same when friction is accounted for, but the currents will no longer be uniform with respect to depth.

To see what effect bottom friction has on an oscillatory motion, consider the simple case of forced harmonic motion in one direction in water of uniform depth. The "zero-amplitude tide" approximation is made; that is, sea level is not a function of time. The acceleration of a water particle due to the tide-producing force $T(t)$ and frictional force is then

$$\frac{\partial v}{\partial t} = T(t) + \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

A solution of this differential equation exists for the conditions that the current is zero at the bottom and that when the value of the vertical coefficient of eddy viscosity is very small, the solution becomes that of the frictionless tide. If the tide-producing force is chosen as

$$T(t) = T_0 \cos \sigma t$$

then the solution for any depth is

$$v(z, t) = \frac{T_0}{\sigma} \{ \sin \sigma t - e^{-B(z+b)} \sin [\sigma t - B(z+b)] \} \quad (12)$$

where $B = \sqrt{\frac{\rho\sigma}{2K}}$

This solution is similar to that given by Lamb (1932, Art. 347) for which the second condition was that there is no external stress on the sea surface, and in fact for small values of the coefficient of eddy viscosity equation (12) and the Lamb solution are identical. For large values of the vertical coefficient of eddy viscosity equation (12) allows vertical gradients in horizontal velocity at the sea surface, but the Lamb solution does not. In turn, this means that for flow described by equation (12) there can be frictional dissipation of energy throughout the entire water column, whereas the Lamb solution excludes such dissipation at the sea surface.

Equation (12) can be integrated with respect to depth, and then divided by the depth, to obtain an expression for the depth-mean tidal current. For both the depth-mean current and that described by equation (12) the phase is a function of the coefficient of eddy viscosity; in particular the phase of the current at any depth is a function of both the coefficient of eddy viscosity and the depth. Relative to the time origin of equation (12) it is found that for values of the eddy viscosity equal to 1, 10, 100, and 1,000 cm²/sec the phase of the *depth-mean* tidal current is 3.5, 12, 43.5, and 74 min, respectively. That is, the larger the influence of friction the *earlier* the depth-mean tidal current occurs. But the rise and fall of the tide is determined by the depth-mean tidal current. Thus if at any particular location the origin of time is taken to correspond with the time of some stand of sea level (such as the time low water), an observer sees only the phase of the current at any depth *relative to the phase of the depth-mean tidal current*. For the set of values of the vertical coefficient of eddy viscosity given above the phase of the tidal current at any depth, relative to the phase of the depth-mean current, was determined (Figure 8). An observer would note that for a small value of the coefficient of eddy viscosity ($K = 1$) the phase in the upper part of the water column is small, negative, and essentially uniform, but that near the bottom large positive values occur; and that for a large value of the coefficient of eddy viscosity ($K = 1000$) the phase changes nearly uniformly from a negative value at the surface to a positive value at the bottom. In all cases the phase of the surface current is negative, that is, the surface current lags behind the depth-mean current, while the opposite is true of current near the bottom.

Although these results have been obtained for the case of a simple alternating tide it can be shown that they apply directly to the more general discussion below which concerns the superposition of two motions and the elliptical nature of some of the tidal current figures. If the tidal current at any depth of observation is in phase with the depth-mean current, which determines the rise and fall of the tide, then in an elliptical tidal current figure the current vectors at high (H) and low (L) water

should form the minor axes of the ellipse, and those at half-tide flood (F) and ebb (E), the major axes. Conversely, if for any given ellipse these particular vectors do not coincide with the axes then the phase is not zero. Unfortunately, a good estimate of the phase from each of the figures in Figure 4 is impossible because of variability in the observations. It does not appear, however, that the phase for any tidal current figure is as large as the time interval corresponding to one tide stage (37 min). This is consistent with the theoretical results if only because the fractional depths of observation (z/b) ranged between -0.1 and -0.7 (see Table 1), and for this depth interval the relative phase should never exceed about 25 min (Figure 8).

The elliptical nature of the tidal current figures

Defant (1961, Vol. 2) demonstrates that an effective tide-producing force which continuously changes direction, so that a corresponding force diagram is a circle, gives rise to a current figure which is a circle, and that the superposition of two such forces of different magnitude and opposite sense of rotation yields an elliptical current figure. Conversely, observation of an elliptical current figure implies the existence of such forces. In particular, if a clockwise current figure is described by

$$\begin{aligned}u_1 &= -V_1 \cos \sigma t \\v_1 &= V_1 \sin \sigma t\end{aligned}$$

and a counterclockwise figure by

$$\begin{aligned}u_2 &= V_2 \cos \sigma t \\v_2 &= V_2 \sin \sigma t\end{aligned}$$

then, for the case in which acceleration, Coriolis force and the effective tide-producing force are the important terms in the equation of motion, that is,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= fv + T_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -fu + T_y\end{aligned}\tag{13}$$

substitution shows that

$$T_{1x} = V_1 (\sigma - f) \sin \sigma t, T_{1y} = V_1 (\sigma - f) \cos \sigma t$$

and
$$T_{2x} = -V_2 (\sigma + f) \sin \sigma t, T_{2y} = V_2 (\sigma + f) \cos \sigma t$$

Thus the circular tidal force figures have the same sense of rotation but are ninety degrees ahead of the corresponding current figures. Subsequent superposition of these motions or of the forces can result in any one of a variety of figures, depending on the magnitude of V_1 and V_2 . Consider for example the situation in Panama Bay where the flood-ebb direction is

330° - 150°T. Arbitrarily one might assume that the tide-producing force alternates in that direction. Then when the y -axis is taken along 330° - 150°T the condition

$$V_1 (\sigma - f) = V_2 (\sigma + f)$$

leads to these equations for the alternating tidal force:

$$T_x = 0$$

$$T_y = [V_1 (\sigma - f) + V_2 (\sigma + f)] \cos \sigma t$$

This means that the two components of the tide-producing force are circular and have the same magnitude and phase, but have opposite sense of rotation. Because of the Coriolis force this equality of magnitude of components does not carry over to those of the current. The current components of the clockwise figure become

$$u_1 = -V_2 \frac{\sigma + f}{\sigma - f} \cos \sigma t$$

$$v_1 = V_2 \frac{\sigma + f}{\sigma - f} \sin \sigma t$$

while the counterclockwise current figure has the same components as given above. Thus when the tidal force is alternating, the magnitude of the clockwise current figure exceeds that of the counterclockwise figure. Consequently the components of the sum of the two currents are

$$u = \frac{2f}{\sigma - f} V_2 \cos \sigma t$$

$$v = \frac{2\sigma}{\sigma - f} V_2 \sin \sigma t$$

which are the equations for an elliptical current figure in which the current vector rotates in time elliptically to the right, and for which the ratio of the semi-axes is σ/f .

Defant (*loc. cit.*) gives a summary of all possible cases for the frictionless tides and indicates that rotations *cum sole* (clockwise in the northern hemisphere) predominate on the rotating earth. The observations showed that both right- and left-rotating tidal currents exist in Panama Bay (see Results and Figure 4). Moreover, the only evident clockwise figure was that observed near the sea surface in the deepest water (E6) while the counterclockwise figures were observed in shallow water or near the bottom (A6 and C40). Therefore although it is possible to have counterclockwise tidal current figures in the absence of friction, the observations suggest that bottom friction plays an important role in determining the sense of rotation in Panama Bay. In order to investigate this possibility the equations (13), rewritten to include the frictional force so that

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= fv + T_x + \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -fu + T_y + \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\end{aligned}$$

are solved for two general circular tidal forces. For the clockwise motion

$$T_{1x} = S \sin \sigma t, \quad T_{1y} = S \cos \sigma t$$

and for the counterclockwise motion

$$T_{2x} = -R \sin \sigma t, \quad T_{2y} = R \cos \sigma t$$

A solution obtained subject to the same conditions which led to equation (12) gives the tidal current as the superposition of two circular current figures. The magnitude of the clockwise-rotating current vector is

$$V_1 = \frac{S}{\sigma - f} [1 + e^{-2\beta(z+b)} - 2e^{-\beta(z+b)} \cos \beta(z+b)]^{1/2}$$

where $\beta = \sqrt{\frac{(\sigma + f)}{2K}}$

while that of the vector which turns counterclockwise is

$$V_2 = \frac{R}{\sigma + f} [1 + e^{-2\alpha(z+b)} - 2e^{-\alpha(z+b)} \cos \alpha(z+b)]^{1/2}$$

where $\alpha = \sqrt{\frac{(\sigma - f)}{2K}}$

When the coefficient of eddy viscosity K is small enough so that the exponential terms of V_1 and V_2 can be ignored (frictionless tide) then the tidal current vector is independent of depth and rotates elliptically to the left only if

$$R > \frac{\sigma + f}{\sigma - f} S$$

If the frictional influences are not negligible, a maximum or minimum value of V_1 (or V_2) occurs at a depth corresponding to a value of the argument $\beta(z+b)$ [or $\alpha(z+b)$] equal to 0.727π , $(n + 0.75)\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Since the argument can never be larger than αb or βb , these place an upper bound on the number of maxima or minima for the corresponding circular tidal current figure. Moreover, because α is always smaller than β a maximum or minimum of V_2 , which is the magnitude of the counterclockwise-turning vector, always occurs deeper than the corresponding maximum or minimum of V_1 . This means that for depths near the bottom and for *any* value of the coefficient of eddy viscosity, bottom friction increases the magnitude of the counterclockwise-rotating vector *relative to that of the other vector*, and in fact, when current is maximum at the sea surface (large coefficient of eddy viscosity or shallow water), this relative effect occurs

throughout the water column. In general, therefore, if a left-rotating elliptical tidal current figure is observed at the sea surface then the figures are relatively increasingly wider with increasing depth, whereas if right-rotation is observed at the sea surface the ellipses are increasingly narrower with increasing depth, and can even be left-rotating near the bottom. These results and some of the observations seem to be consistent. At Station A the counterclockwise figure at 20 ft appears to be relatively wider than that at 6 ft, while at Station E the mid-depth clockwise figure is narrower than that near the surface. At Station C there appears to be right-rotation at 6 ft while left-rotation is definite at 40 ft. At Station B the left-rotation observed at 40 ft is consistent with the figures of Stations A and C at that depth. The counterclockwise-turning of the tidal current vector at Station D appears definite at both 6 and 40 ft.

On the basis of the good agreement between the observations and the simple physical model it can be concluded that bottom friction is important in determining the sense of rotation in, and the form of, the elliptical tidal current figures in Panama Bay. However, nothing more of a predictive nature can be said of the tidal figures because there remain many unknowns. For example, at any location it is not possible to know *a priori* what the tide-producing force is; from good observations at several depths a value of the coefficient of eddy viscosity could be estimated and subsequently the form of tide-producing force could be determined, within the limits of the model used, but the variability in the observations examined here precludes this step.

SUMMARY

From the measurements of currents at three depths at each of five locations in the western part of Panama Bay during September-October 1958, for periods of up to eleven semi-diurnal tidal cycles, these facts about the circulation were re-affirmed or learned:

- a.* In general the current is the sum of tidal and net current components of about equal magnitude.
- b.* The net current flows counterclockwise through the Gulf and Bay, and is part of the Colombia Current.
- c.* The direction of flow of the net current was generally along the isobaths.
- d.* Within the 10-fm (18 m) contour the speed of the net current was about 0.3 knots (0.15 m/sec) while farther offshore but within the 20-fm (36 m) contour the speed was 0.7 knots (0.35 m/sec).
- e.* At the offshore stations bottom friction had a recognizable influence on the vertical distribution of net current for, in agreement with the distribution expected from a simple physical model, the current near the sur-

face had an onshore component while the current near the bottom had an offshore component; at the inshore stations the vertical distributions showed no consistent pattern, indicating that a more elaborate model is required to explain the distributions.

- f.* The tide is essentially a standing wave, and can be treated as such.
- g.* The main flood-ebb direction of tidal currents was 330° - 150° T.
- b.* At any location the depth-mean tidal current in the flood-ebb direction can be represented as a simple function of average water depth, distance offshore, and tidal range and duration.
- i.* The observed tidal current figures were generally elliptical, with the major axis along the flood-ebb direction.
- j.* The component of tidal current normal to the flood-ebb direction and the direction of rotation of the current vector in the tidal ellipse were attributed to Coriolis force and/or bottom friction.
- k.* The phase of the tidal current was apparently everywhere small, relative to the stand of the tide at Balboa, but could not be estimated from the data.
- l.* The tidal and net current components combined to produce different total currents, depending on location; usually the ebb currents were the stronger because the net current had a component along 150° T.
- m.* The maximum total current, which would occur during tides of maximum spring range, would be about 1.5 knots (0.8 m/sec) in the area between Chame Point and Taboga Island.

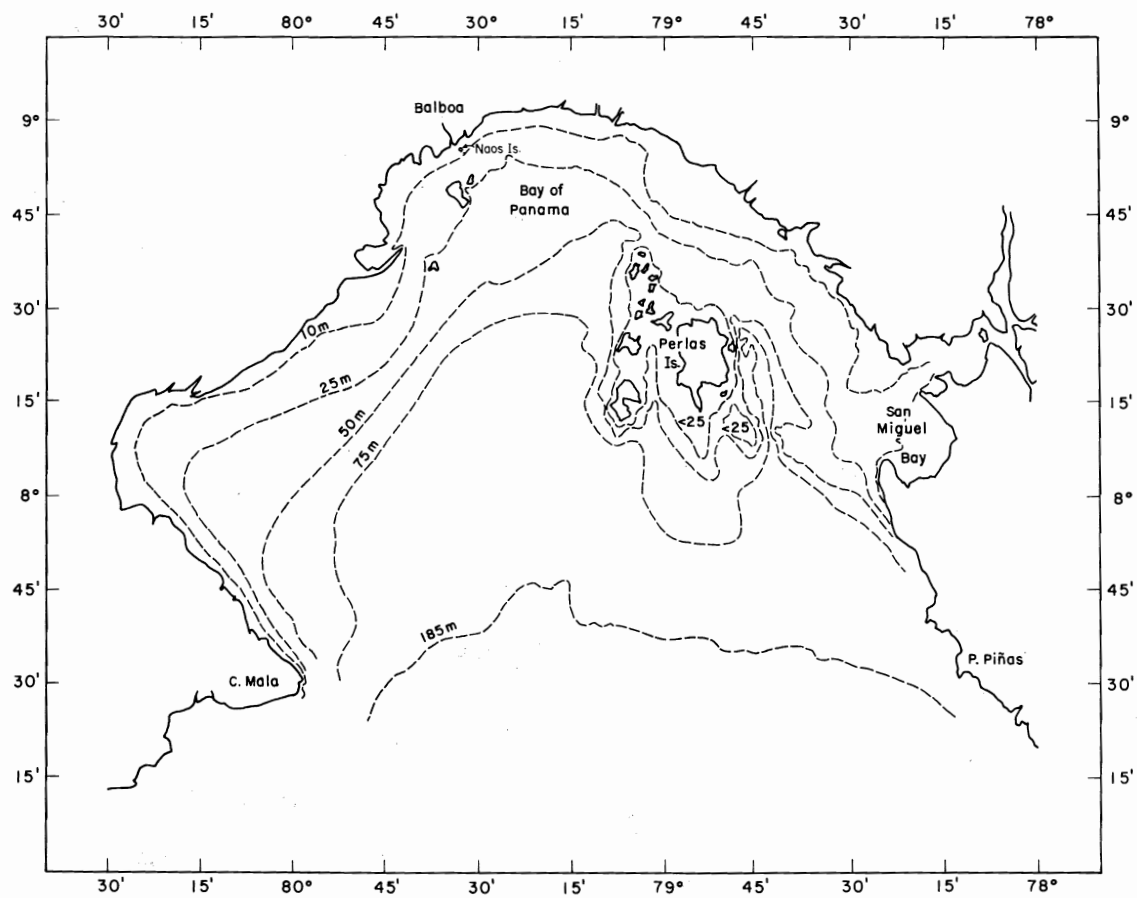


FIGURE 1. General morphology of the Gulf of Panama.
FIGURA 1. Morfología general del Golfo de Panamá.

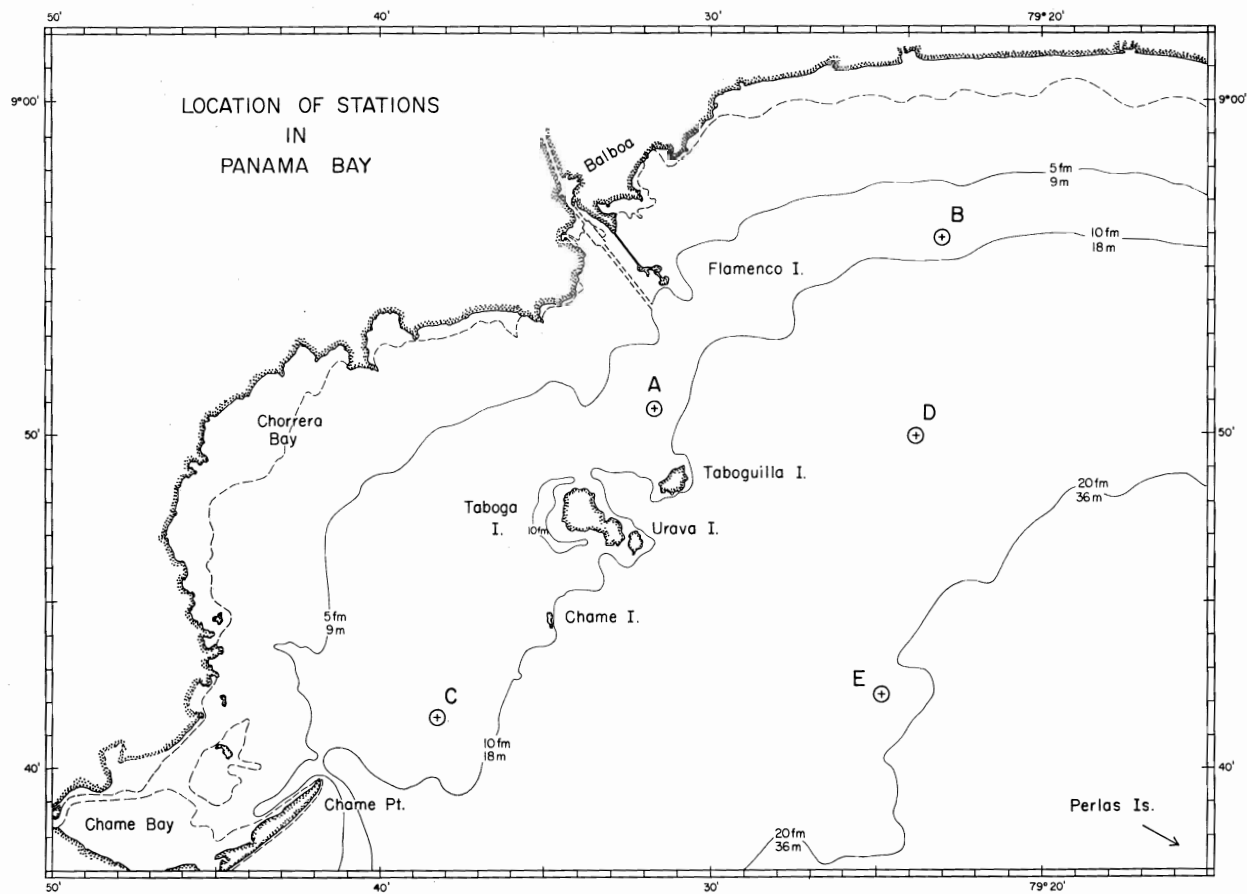


FIGURE 2. The western part of Panama Bay: morphology, place names, and location of the current stations.
FIGURA 2. Parte occidental de la Bahía de Panamá: morfología, nombre de los lugares y localización de las estaciones de las corrientes.

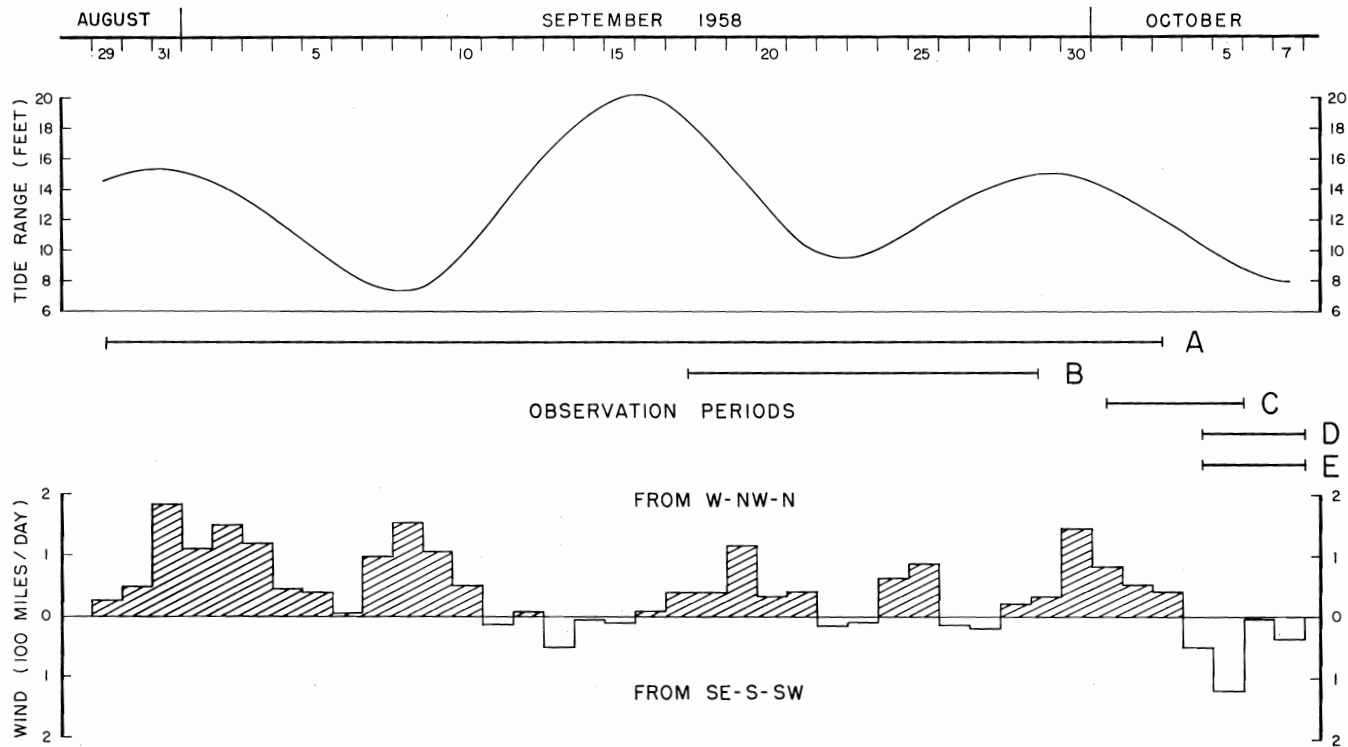


FIGURE 3. Range of tide predicted for Balboa, C. Z. (upper) and northwesterly and southerly winds observed during the whole of the survey period (lower). The duration of observations at each current station is indicated (middle).

FIGURA 3. Fluctuación de la marea (parte superior) anunciada para Balboa Z. del C., y vientos noroestes y sudestes (parte inferior) observados durante todo el periodo del reconocimiento. Se indica (en medio) el periodo de duración de las observaciones en cada estación de corrientes.

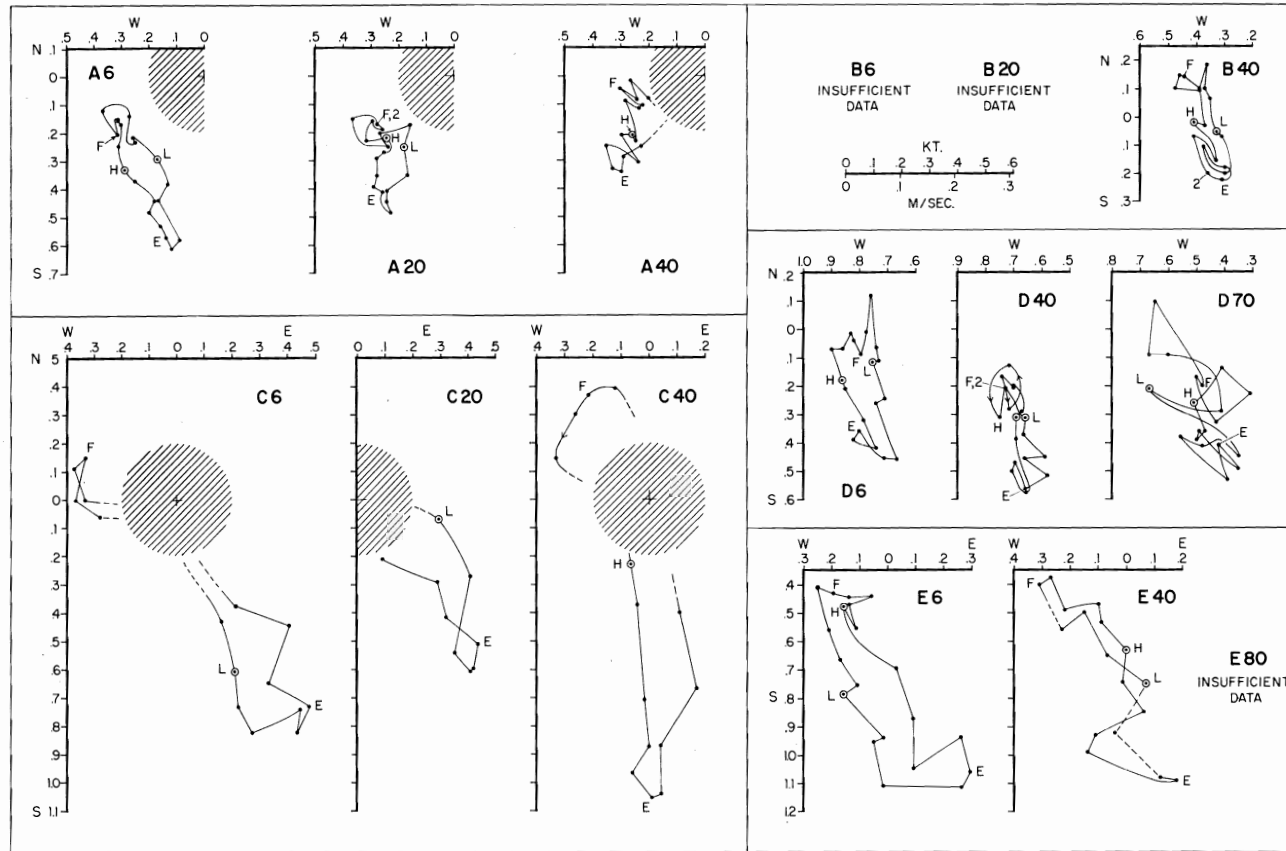


FIGURE 4. Plots of the end-points of the current vectors which are averages for each tide-stage, at each station and depth of observation. The tide stages corresponding with high (H) and low (L) water and half-tide flood (F) and ebb (E) are annotated. The hatched areas represent the threshold region of weak current which could not be measured.

FIGURA 4. Gráficos de los puntos terminales de los vectores de la corriente, que son los promedios correspondientes a cada etapa de la marea, en cada estación y profundidad observadas. Las etapas de la marea correspondientes a la marea alta (H) y a la marea baja (L), y las medias mareas del flujo (F) y del refluo (E), han sido anotadas. Las áreas sombreadas representan la región de entrada de la corriente débil, que no pudo ser medida.

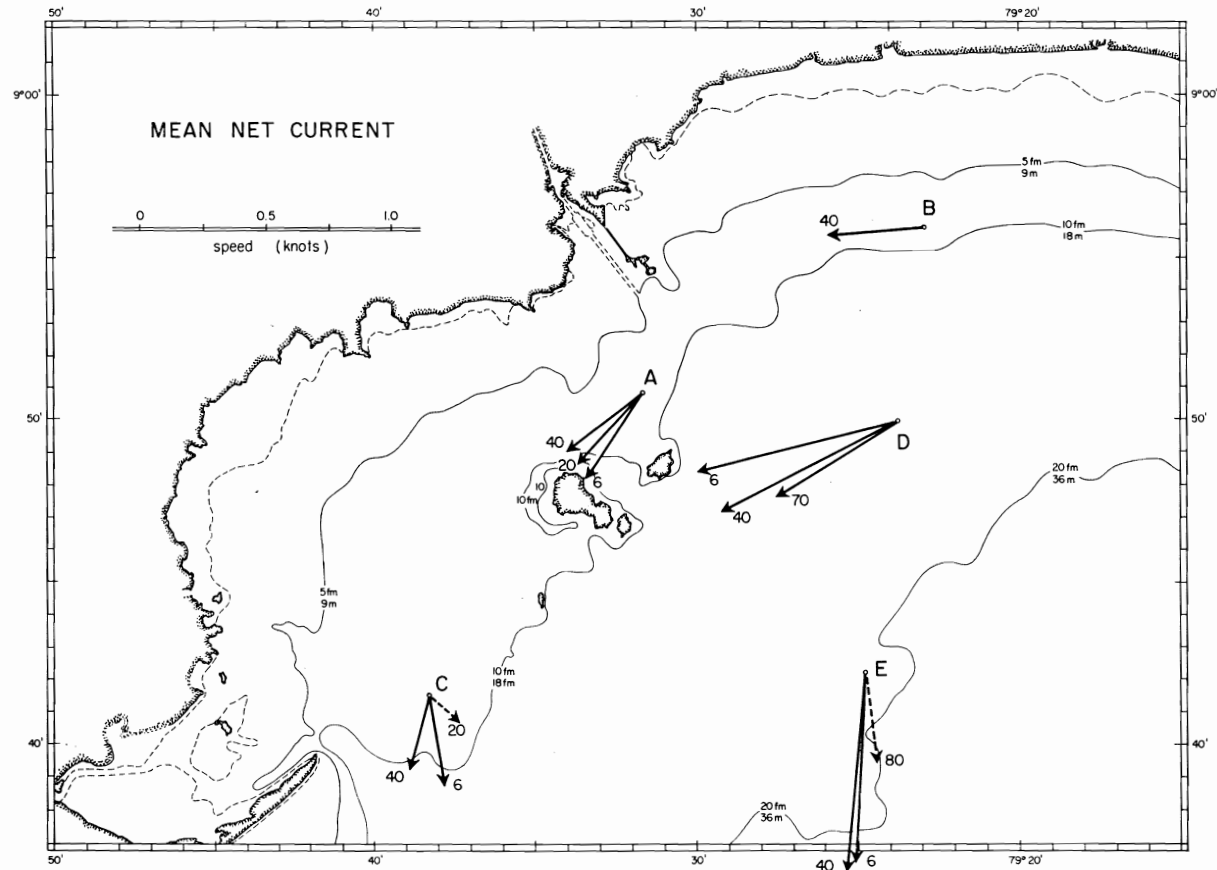


FIGURE 5. Mean net currents. The end-points of these vectors are the mid-points of the corresponding plots in Figure 4. The broken lines indicate best estimates based on incomplete sets of data.

FIGURA 5. Corrientes netas medias. Los puntos terminales de estos vectores son los puntos medios de los correspondientes gráficos de la Figura 4. Las líneas a guiones indican las mejores estimaciones basadas en series incompletas de datos.

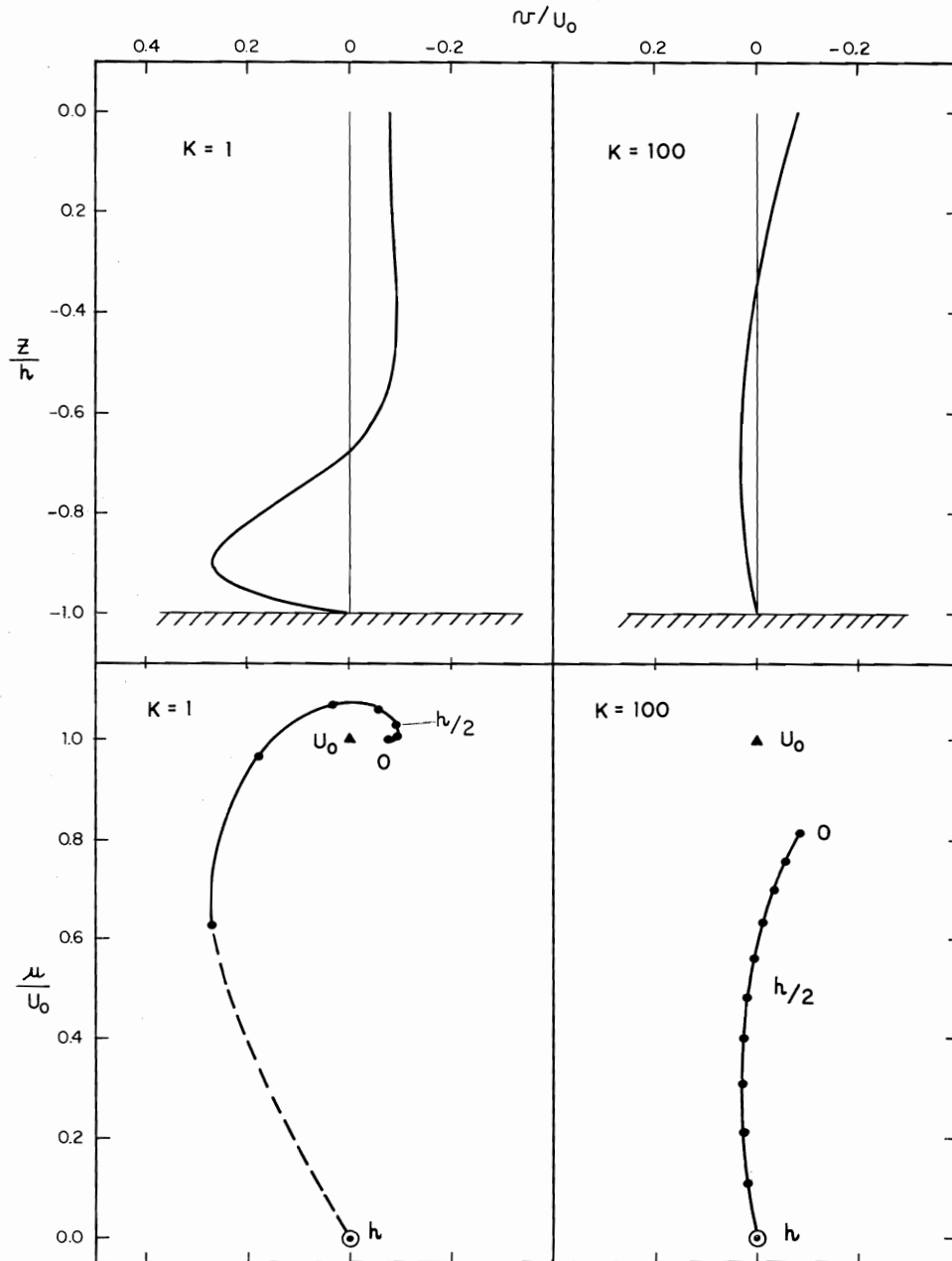


FIGURE 6. Expected vertical distribution of net current normal to the coast (upper) and corresponding distributions of horizontal current (lower) for two values of the vertical coefficient of eddy viscosity, based on a simple model. U_0 is the velocity in the frictionless case.

FIGURA 6. Distribución vertical esperada de la corriente neta normal a la costa (parte superior), y distribuciones correspondientes de la corriente horizontal (parte inferior) para dos valores del coeficiente vertical de viscosidad del remolino, basadas en un modelo sencillo. U_0 es la velocidad en el caso en que no hay fricción.

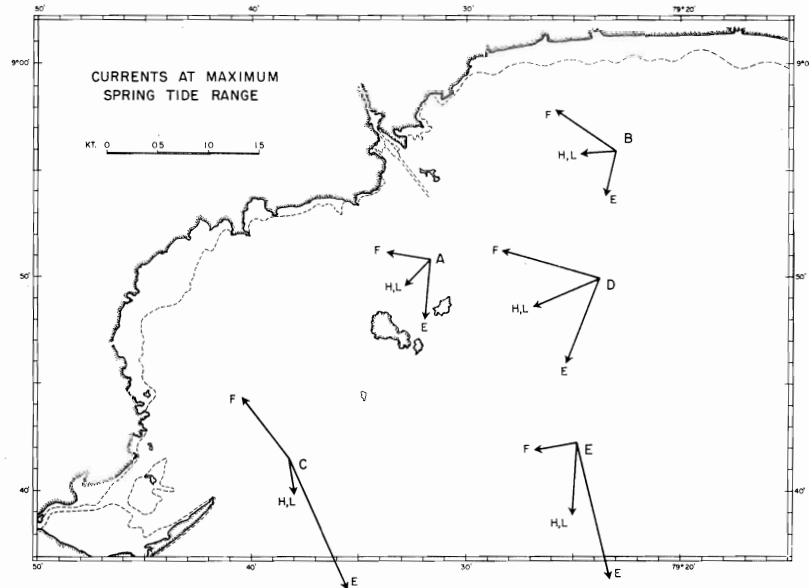


FIGURE 7. Currents at high and low water (H, L) and the half-tides (F, E) expected during tides of maximum spring range, and when the net current speed is about 0.35 knots (0.18 m/sec) inshore and 0.7 knots (0.35 m/sec) offshore.

FIGURA 7. Corrientes en las mareas altas y bajas (H, L) y las medias mareas (F, E) esperadas durante la fluctuación máxima de las mareas de sicigia, y cuando la velocidad de la corriente neta es de unos 0.35 nudos (0.18 m/seg) en la costa y 0.7 nudos (0.35 m/seg) en alta mar.

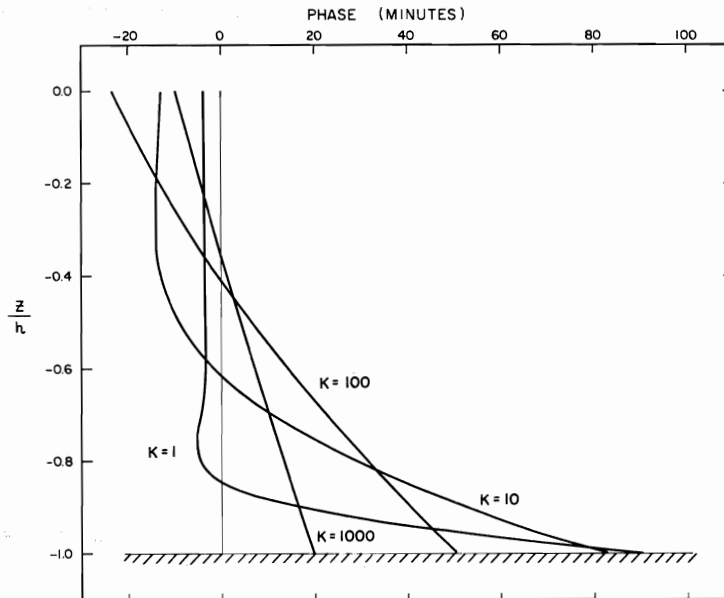


FIGURE 8. Vertical distribution of the phase of the tidal current, relative to that of the depth-mean current, for four values of the vertical coefficient of eddy viscosity.

FIGURA 8. Distribución vertical de la fase de la corriente de las mareas, relacionada con la de la corriente media-vertical, correspondiente a los cuatro valores del coeficiente vertical de viscosidad del remolino.

TABLE 1. Current station information for Panama Bay current survey

TABLA 1. Información de las estación es de corrientes, correspondiente al reconocimiento de las corrientes de la Bahía de Panamá

Station	USNHO Station	Observation period 1958	Latitude N	Longitude W	Depth to bottom* (feet)	Current meter depths† (feet)
Estación	Estación USNHO	Período de observación 1958	Latitud N	Longitud W	Profundidad al fondo* (pies)	Correntómetro profundidades† (pies)
A	10-6	29 Aug - 3 Oct	8° 50.8'	79° 31.7'	55	6, 20, 40
B	10-2	17 - 29 Sept	8° 55.9'	79° 23.0'	55	6, 20, 40
C	10-16	1 - 6 Oct	8° 41.5'	79° 38.3'	55	6, 20, 40
D	10-11	4 - 7 Oct	8° 49.9'	79° 23.8'	90-95	6, 40, 70
E	10-23	4 - 7 Oct	8° 42.2'	79° 24.8'	115	6, 40, 80

* Estimated from the mean low spring depths in H. O. Chart No. 5002

Estimada de la profundidad cartografiada mapa H. O. No. 5002, del promedio de la marea de sicigia mínima

† Depth below sea surface — Profundidad bajo la superficie del mar

TABLE 2. Characteristics of tides during observation periods***TABLA 2.** Características de las mareas durante los períodos de observación*

Station	Usable record		Tidal cycles	Tidal range			Mean range		Mean duration		Range/duration	
	from	to		min.	max.	mean	flood	ebb	flood	ebb	flood	ebb
Estación	Registros utilizables		Ciclos de las mareas	Fluctuación de las mareas			Fluctuación media		Duración media		Fluctuación/duración	
	de	a		min.	max.	media	flujo	reflujo	flujo	reflujo	flujo	reflujo
A	0300/13/IX	1100/15/IX	4.5	16.8 (5.1)	20.2 (6.2)	18.6 (5.65)	18.6 (5.65)	18.6 (5.65)	5.98	6.39	3.11 (0.95)	2.91 (0.89)
B	1500/23/IX	0530/29/IX	11	10.0 (3.0)	14.9 (4.5)	12.7 (3.85)	12.8 (3.90)	12.5 (3.80)	6.22	6.14	2.06 (0.63)	2.03 (0.62)
C	1300/ 1/X	1400/ 4/X	6	10.8 (3.3)	14.1 (4.3)	12.5 (3.80)	12.6 (3.85)	12.3 (3.75)	6.03	6.28	2.10 (0.64)	1.96 (0.60)
D, E	1530/ 4/X	2330/ 7/X	7	7.7 (2.3)	10.5 (3.2)	8.8 (2.70)	8.9 (2.70)	8.7 (2.65)	5.83	6.66	1.52 (0.46)	1.30 (0.40)
					ft (m)		ft (m)		hr		ft/hr (m/hr)	

* Derived from values predicted for Balboa — Deducidas de los valores predichos para Balboa

TABLE 3. Zonal pressure gradient and depth-mean net current for various values of the vertical coefficient of eddy viscosity**TABLA 3.** Gradiente de presión por zonas y corriente media-vertical neta correspondiente a los diversos valores del coeficiente vertical de la viscosidad del remolino

K ($\text{cm}^2 \text{ sec}^{-1}$)	$-\frac{g}{fU_0} \frac{\partial \xi}{\partial x}$	u/U_0
0	0.00	1.00
1	0.08	0.93
10	0.31	0.80
100	0.66	0.46
1000	0.87	0.19
∞	1.00	0.00

U_0 is the zonal velocity for $K = 0$ — U_0 es la velocidad de la zona para $K = 0$
 Depth is 20 m — La profundidad es de 20 m

TABLE 4. Expected maximum depth-mean tidal currents**TABLA 4.** Máximo esperado de las corrientes medias-verticales de las mareas

Station	L (km)	h (m)	R/D (m/hr) flood	R/D (m/hr) ebb	V_{\max} (m/sec) flood	V_{\max} (m/sec) ebb	Observed V_{\max} (m/sec)
Estación	L (km)	h (m)	R/D (m/hr) flujo	R/D (m/hr) reflujo	V_{\max} (m/seg) flujo	V_{\max} (m/seg) reflujo	V_{\max} observada (m/seg)
A	8.3	20	0.95	-0.89	0.17	-0.16	0.11
B	10.7	20	0.63	-0.62	0.15	-0.14	0.11
C	21.3	18	0.64	-0.60	0.33	-0.31	0.31
D	21.9	31	0.46	-0.40	0.14	-0.12	0.12
E	29.7	37	0.46	-0.40	0.16	-0.14	0.22

**CORRIENTES OBSERVADAS EN LA BAHIA DE PANAMA
DURANTE SEPTIEMBRE-OCTUBRE, 1958¹**

por

Edward B. Bennett

INTRODUCCION

Durante el período entre fines de agosto y principios de octubre de 1958, la United States Navy Hydrographic Office (ahora la United States Navy Oceanographic Office) tomó a su cargo un programa para observar las corrientes en la parte occidental de la Bahía de Panamá. De acuerdo con las especificaciones del proyecto, las observaciones de las corrientes debían hacerse cada media hora a tres profundidades en cada una de seis localidades; en una de ellas durante treinta días y en las otras cinco durante cinco días. A pesar de que no todos estos objetivos fueron cumplidos a causa del mal funcionamiento y fallas instrumentales, se recogieron suficientes datos en cinco estaciones, como para proporcionar una descripción bastante detallada de la pauta de las corrientes, tal como existía durante las observaciones.

Este informe se refiere, primero, al análisis y examen de dichos datos y a los procedimientos empleados para reducir éstos a los componentes de las corrientes netas y a los componentes de las corrientes durante las mareas, y segundo, al efecto que tienen sobre la pauta de las corrientes la fluctuación de las mareas, la topografía del fondo y la fricción del fondo.

**FISIOGRAFIA DEL GOLFO DE PANAMA Y DE LA
BAHIA DE PANAMA**

Cabo Mala en el oeste y Punta Piñas en el este son tomados generalmente como límites del Golfo de Panamá (Figura 1). La línea entre estos dos puntos, casi en dirección este-oeste mide unos 200 km de longitud y encierra el golfo cuya cabecera dista de esta línea imaginaria 170 km hacia el norte, en donde se hallan la Bahía de Panamá y la entrada al Pacífico del Canal. Entre los puntos de entrada, la curva de 185 m (100 brazas) se dirige ligeramente hacia el norte; las profundidades exteriores aumentan rápidamente a 1,000 m y más, mientras que dentro de esas mismas profundidades hay una disminución gradual hacia el fondo de la bahía. La suave disminución en la profundidad es interrumpida por las Islas Perlas, que se encuentran dentro del golfo, al este de su centro, y dentro del contorno de 50 m. Al oeste de estas islas, el perímetro del fondo penetra más al norte, formando un canal de baja profundidad que se dirige hacia el fondo de la Bahía de Panamá.

¹ Esta investigación fue subvencionada en parte por el U. S. Atomic Energy Commission, Contrato No. AT(11-1)-34, Proyecto 99, junto con el Institute of Marine Resources de la Universidad de California.

En la parte occidental de la Bahía de Panamá (Figura 2), el fondo suave de lodo tiene la pequeña gradiente de 1 m/km a profundidades de unos 50 m, y solamente cerca del doble en la periferia. Así que, los extensos bajíos de lodo al fondo de la Bahía de Panamá y en la Bahía de Chorrera se ajustan a la topografía del área, que generalmente presenta suaves inclinaciones.

EXAMEN

Corrientes netas

Las corrientes netas en la Bahía de Panamá son bien conocidas y han sido presentadas en muchos lugares en la literatura y en mapas. Lo siguiente ha sido tomado al pie de la letra del H. O. No. 174, "Direcciones para la Navegación en Sudamérica" (U. S. Hydrographic Office 1938):

"Ha sido encontrada una corriente estable con dirección hacia el norte, después de pasar el Cabo San Lorenzo², con una velocidad de 24 a 36 millas por día, la cuál se extiende unas 60 millas mar afuera. Esta corriente se dirige a lo largo de la costa, y sigue la dirección del litoral, entra y hace un circuito completo del Golfo y de la Bahía de Panamá. [p. 400]

"Hay una corriente de fuerza variable, pero bastante constante en dirección, que se dirige hacia el oeste, a través del fondo de la Bahía de Panamá, y luego hacia el sur, entre la Isla Taboga y el litoral." [p. 417]

Así que el flujo neto en el Golfo y la Bahía de Panamá es parte de un sistema de corriente más grande que ha sido llamado la Corriente de Colombia (Cromwell y Bennett 1959).

Corrientes de las mareas

Fleming (1938) demostró que las mareas en el Golfo de Panamá y a lo largo de la costa del Pacífico de la América Central son del tipo semi-diurno, asociado con una onda constante, de modo que las corrientes máximas en las mareas, tanto en las mareas altas como en las bajas, ocurren en medio de las mareas. Dentro del golfo, la fluctuación de la marea varía de 5 pies (1.5 m), en las mareas de cuadratura mínima hasta 22 pies (6.7 m) en las mareas de sicigia máxima. En la Bahía de Panamá, la fluctuación de la marea es un 19 por ciento mayor que a la entrada del golfo; Fleming demostró que ésto puede atribuirse al efecto de la disminución de profundidad sobre la onda constante. Aún más, él usó la ecuación de continuidad para demostrar que en cualquier posición dentro del golfo, la corriente media-vertical máxima de la marea podría ser expresada como una función de profundidad de la distancia desde la costa, y de la fluctuación de la marea.

² Cabo San Lorenzo, Ecuador (1°S, 80°50'W)

Las observaciones previas de las corrientes de las mareas en la Bahía de Panamá se describen en H. O. 174, como sigue:

“Fueron realizadas observaciones de la dirección de las corrientes en tres localidades de la Bahía de Panamá, entre las Islas Taboga y Flamenco. Esas observaciones indican que la dirección general de la corriente de la marea es aproximadamente paralela al eje del canal³. Se encontró que las corrientes de superficie de una marea entrante, procedían más del este, especialmente en el punto de observación más cercano a la Isla Flamenco, lo cual indica que las corrientes de las mareas son afectadas por los vientos⁴ y la corriente a lo largo de la costa en la Bahía de Panamá. La velocidad máxima de la corriente observada en este sector de la bahía fue de menos de 0.6 nudos. [p. 417-418]

“Entre las Islas Taboga y Otoque, las corrientes de las mareas, tanto del flujo como del reflujó, varían mucho en su dirección en los diferentes estados de la marea. . . .” [p. 417]

LAS OBSERVACIONES

Mediciones de las corrientes

Las cinco localidades en donde se hicieron observaciones de las corrientes en 1958 y la designación de las respectivas posiciones con caracteres alfabéticos se presentan en la Figura 2. En la Tabla 1 se encuentra un resumen de la información sobre las observaciones de las corrientes logradas en las estaciones antes mencionadas.

En cada estación se ancló una boya; de cada boya fueron suspendidos tres correntómetros de Roberts, de tipo impelente (Roberts 1952), uno a 6 pies bajo la superficie del mar, otro a profundidad media, y un tercero aproximadamente a 20 pies sobre la profundidad cartografiada del promedio de la pleamar mínima, para evitar el contacto con el fondo durante la marea baja.

Las señales de los correntómetros eran transmitidas por un radiotransmisor colocado en cada boya, a una estación de control instalada en la costa, en donde eran registradas en cinta magnética por medio de un cronógrafo, calibradas al décimo de nudo y de grado más próximos, y anotadas. Cada una de las boyas fue observada cada media hora por unos tres minutos, que fue el tiempo requerido para que un conmutador de secuencia pusiera en contacto los tres correntómetros. Cuando había duda en cuanto a los resultados del registro final, se tomaba un segundo

³ El eje del extremo del Canal de Panamá en el Pacífico está alineado alrededor de los 330-150°T.

⁴ No se de la razón de ésto.

registro de tres minutos. La estación de control, que inicialmente estaba en la Isla Flamenco, fue trasladada a la Isla Taboga, después de terminar las observaciones en la Estación B.

Las señales que correspondían a velocidades de corriente de unos 0.2 nudos o menos, generalmente no fueron reconocidas y se dejaron en blanco en el registro de datos. Además, una señal irreconocible o perdida a causa de un mal funcionamiento eventual de un instrumento o de alguna dificultad en la transmisión, también se dejó en blanco. Por esta razón fue necesaria alguna corrección de los datos, previa al análisis que se dará luego. Así que algunas veces al tomar en cuenta la naturaleza del registro, fue posible decidir antes y después de un espacio en blanco, si éste fue debido a que la corriente era menor que el valor de entrada o a alguna dificultad en el sistema registrador.

Aun cuando las observaciones en la Estación A (la estación de los 30 días) fueron hechas durante el período del 31 de agosto al 3 de octubre, con solamente unos pocos vacíos en el registro debidos a dificultades instrumentales, la duración del registro aprovechable, o sea, el registro con corrientes más o menos firmes sobre el valor mínimo de entrada (0.2 nudos), fue corto y limitado al período del 13 al 15 de septiembre. En cuanto a las otras cuatro estaciones, los registros aprovechables fueron casi tan cortos, ya que la máxima duración fue de 5.5 días para la Estación B (Tabla 2).

Mareas en Balboa durante el período de observaciones

La fluctuación de la marea (la diferencia de altura entre las sucesivas mareas bajas y altas y viceversa) pronosticada para Balboa (U. S. Department of Commerce 1957) durante el período de observaciones, se presenta como una curva suavizada en la parte superior de la Figura 3. La fluctuación de la marea varió notablemente, y alcanzó los mínimos de 7.5 pies el 8 de septiembre, de 9.5 pies el 22 de septiembre y de 8 pies el 7 de octubre, y los máximos de 20 pies el 16 de septiembre y de 15 pies el 29 de septiembre. Así como se registró este cambio general en la fluctuación de las mareas, con el tiempo, hubo también, durante los períodos de observación aprovechable en cada estación, algunas diferencias entre el semiflujo y semireflujo del ciclo de mareas. Esto puede verse en la Tabla 2, que contiene una lista de la fluctuación media, del período de duración media y de la tasa media de cambio del nivel del mar, correspondientes a las mareas altas y bajas, según se ha determinado por los datos indicados en las tablas predichas (*ibid.*). Además en la Tabla 2 se indica, para cada estación en que fueron medidas las corrientes el intervalo tiempo-fecha del registro aprovechable, el número de ciclos de las mareas y la fluctuación mínima, máxima y media de las mismas. Con la excepción de la Estación A, en la que la fluctuación media del flujo y del reflujo eran iguales, la fluctuación del flujo excedió a la del reflujo. Esta diferencia

es debida al hecho de que la fluctuación de las mareas estuvo cambiando monótonamente durante cada uno de los períodos de observación, y a la fase particular de la marea durante la cual fueron comenzadas las observaciones. Así, por ejemplo, si las observaciones sobre un número integral de ciclos con fluctuación creciente de la marea comienzan durante una marea baja, entonces la fluctuación media del flujo excede a la del reflujo durante el período de la medición. Esta fue exactamente la situación de las condiciones en la Estación B. En lo que respecta a las Estaciones C, D y E, la fluctuación disminuyó, pero las mediciones se comenzaron en las mareas altas, de modo que nuevamente la fluctuación media del flujo excedió a la del reflujo. Las observaciones en la Estación A fueron realizadas bajo condiciones similares a las de la Estación B, pero se comenzaron y fueron terminadas con mareas menguantes, de modo que las dos fluctuaciones medias resultaron iguales. La duración media de la marea menguante excedió a la correspondiente a la marea alta en todas las estaciones, excepto en la Estación B. Esto fue debido solamente a la naturaleza de las mareas durante el período de observación, para el cual esta condición considerada en su integridad, fue generalmente válida. La fluctuación usualmente mayor del flujo de las mareas y la mayor duración del reflujo de las mareas, se combinaron para formar la tasa media de cambio del nivel del mar (la fluctuación dividida por la duración), mayor para el flujo de las mareas que para el reflujo de las mareas durante las observaciones hechas en todas las estaciones para medir las corrientes. Esto es digno de tomarse en cuenta porque (como se tratará a continuación) la fuerza relativa de las corrientes de las mareas es directamente proporcional a la tasa de cambio del nivel del mar. En consecuencia, aparte de otras condiciones que las corrientes deben satisfacer, sería de esperar que las corrientes observadas en las mareas fueran relativamente más fuertes en la Estación A durante el flujo de las mareas, y las más débiles en las Estaciones D y E durante el reflujo de las mareas.

Vientos en Balboa durante el período de observación

Los vientos en Balboa durante los meses de septiembre y octubre son generalmente ligeros y variables (Schaefer, Bishop y Howard 1958). Consecuentemente, los vientos débiles que prevalecieron durante el período de observación (Figura 3, parte inferior) están de acuerdo con las condiciones promedio. A pesar de que alrededor del 95 por ciento del tiempo, el viento sopló tanto del sector W-NW-N como del SW-S-SE, solamente hubo dos días, durante los que se hicieron observaciones aprovechables de las corrientes, en que el viento diario excedió 100 millas por día (alrededor de 4 millas por hora) en cualquiera de los dos sectores.

REDUCCION DE LOS DATOS

La selección del procedimiento empleado para reducir las observaciones de las corrientes a los componentes de las corrientes netas y a los com-

ponentes de las corrientes de las mareas, dependió de la aparente reproductividad o precisión de las observaciones en una fase particular de la marea, medida durante varios ciclos, y en los aspectos en que la pauta de los flujos podía investigarse con los datos.

Un examen rápido de los datos dió el resultado trivial de que el movimiento de las mareas es un componente importante de las corrientes en la Bahía de Panamá. Algunos gráficos preliminares demostraron dos hechos más: primero, que existían corrientes netas que tenían la misma magnitud que las corrientes máximas de las mareas; y segundo, que las corrientes netas no eran estables, pero estaban sujetas a aumentos o mermas en su magnitud durante períodos que podían alcanzar a varios días. Ambos hechos se anticiparon basados en las citas anteriormente mencionadas. Fue necesario, en consecuencia procurar una estimación de las corrientes netas como funciones de tiempo, antes de proceder a extraer de las observaciones los movimientos de las mareas.

Como se sabe que la circulación en el Golfo de Panamá es sensible a la fuerza local de los vientos superficiales (Forsbergh 1963), se procuró correlacionar los períodos de corrientes netas relativamente altas y bajas con los vientos observados en Balboa. El que no hubiera correlación puede tal vez ser atribuido al hecho de que el período de observación fue un período de vientos débiles y variables. Esto no descarta la posibilidad de que el estado del viento en algún otro lugar, digamos en medio del Golfo de Panamá, puede ser un mejor índice de la corriente neta en la Bahía de Panamá durante los períodos de viento débil en Balboa.

Una indicación del hecho de que la amplitud de las mareas puede ser importante, la proporciona el registro utilizable tomado de la Estación A, que fue hecho durante el período del 13 al 15 de septiembre, cuando la fluctuación de la marea fue de 17 a 20 pies. Esta fue la única parte del registro con corrientes más o menos constantemente más fuertes que el valor de entrada y, en consecuencia, fue la única parte del registro sujeta a análisis para determinar los componentes de las corrientes.

Un mayor análisis para determinar la dependencia del tiempo de las corrientes netas fue anulado por la brevedad de los registros servibles de las cinco estaciones, y por lo que debe ser considerada como una variabilidad inherente en la corriente misma, o alguna introducida por el sistema de medición (el movimiento lateral de la boya, de la cual fueron suspendidos los correntómetros, o la oscilación de los correntómetros en un plano horizontal podría introducir variabilidad en las observaciones). Esto fue desafortunado, porque se requiere que el análisis para los movimientos de las mareas tome la forma de promedios durante varios períodos de las mareas, o sea, sobre toda la extensión del registro aprovechable en todos los casos, a fin de aumentar la probabilidad de eliminar las corrientes netas. Al mismo tiempo fue impedida la investigación para obtener una relación anticipada entre las corrientes máximas de las mareas y la fluc-

tuación de las mismas. A pesar de la brevedad de los períodos de las observaciones en las cinco estaciones, hubo cambios en la fluctuación de las mareas que pueden haber tenido una influencia notoria en las corrientes. Por ejemplo, durante los 4.5 días de observación en la Estación C, la fluctuación disminuyó constantemente de 14 a 9 pies. Consecuentemente, sería de esperar un cambio correspondiente en la magnitud de la corriente máxima de la marea (tal vez el cambio sería relativamente mayor especialmente cerca de la costa, a causa de las diferentes áreas de extensos bajíos de fango en la periferia de la Bahía de Panamá que serían cubiertos por mareas de diferente altura). El resultado fue, en consecuencia, que el análisis para determinar el movimiento de las mareas se limitó a determinar el movimiento *medio* de las mismas en la presencia de la corriente neta *media* durante cada período de observación.

El procedimiento para separar los movimientos netos y los de las mareas fue como sigue: la diferencia de *tiempo* entre las aguas sucesivamente bajas y altas (o aguas altas y bajas), pronosticado para Balboa, fue dividido en diez intervalos iguales. De ese modo fue dividido un ciclo completo de mareas en veinte intervalos o *etapas de la marea*. Se introdujo un cambio de la mitad de un intervalo para que así el centro de la primera etapa de la marea correspondiera con el agua baja, y el centro del undécimo intervalo con el agua alta. Luego los resultados de las observaciones obtenidos de cada medidor de corriente fueron clasificados de acuerdo a la etapa de la marea por fecha y tiempo de observación. Como las observaciones fueron realizadas cada media hora, hubo generalmente veinticinco observaciones de las corrientes por cada período de marea semi-diurna (12 horas 25 minutos) para ser divididas entre las veinte etapas, de manera que en cada ciclo de mareas hubo por lo menos una observación de corriente por etapa de la marea, con dos más o menos, en cada cuarta etapa. En aquellos casos en que fueron clasificadas dos observaciones sucesivas en la misma etapa de la marea, la media de los dos vectores fue determinada y usada para tal fase. Fue escogido este sistema de manera que, para cualquier etapa particular de la marea, los promedios obtenidos de varios ciclos de marea o días de registro, tiendan a ser representativos de las condiciones en el punto medio de aquella fase.

El siguiente paso fue la determinación del vector de la corriente media total para cada etapa de la marea a lo largo del registro aprovechable. Por *corriente total* se entiende la suma de los vectores de los componentes de la corriente neta y de la corriente de la marea. Es aquí donde fueron indicados los posibles efectos de la corriente neta cambiante, de la aparente variabilidad inherente en las corrientes o de la amplitud cambiante de las mareas. En algunas localidades el grupo de vectores de corriente que debía promediarse en una etapa particular de la marea, tenía una fluctuación en dirección tan grande, como de unos 70 grados, y una fluctuación en velocidad hasta de 0.5 nudos (0.25 m/seg). Generalmente las corrientes más al oeste hacia la costa fueron las más fuertes. A pesar de estas

variaciones, el vector medio de la corriente total fue determinado para cada etapa de la marea si se contaba con tres o más vectores enumerados para dicha etapa en el registro aprovechable, y si el número de vectores enumerado era mayor que el número de observaciones de las corrientes de 0.2 nudos o menores, las cuales, como se dijo antes, se dejaron en blanco en el registro de datos. En los casos en los que tanto los vectores como los espacios en blanco estaban enumerados, y el número de los primeros era el mayor, los últimos eran incluidos en el procedimiento para obtener promedios al asignar arbitrariamente una corriente de magnitud de 0.2 nudos y una dirección igual a la media de las direcciones registradas. Esto introdujo indudablemente bias de cierto orden en el análisis, pero se consideró más aceptable que cualquiera de las dos alternativas, al convertir a cero las magnitudes o ignorar las observaciones. Cuando el número de espacios en blanco excedía el número de vectores registrados en una etapa de la marea, la media de la corriente total no era determinada.

RESULTADOS

La Figura 4 presenta los puntos finales de los vectores de las corrientes totales que podrían ser calculados en cada profundidad de observación en cada una de las estaciones en la que se midieron las corrientes. Para una serie completa de vectores de las corrientes totales hay veinte puntos. El área circular sombreada o parte de la misma que aparece en algunos de los gráficos, es la región del punto de entrada de la velocidad de la corriente de 0.2 nudos o menos. Así que, el centro de la región del punto de entrada es el origen del gráfico. Los puntos terminales de los vectores de las corrientes totales (círculos negros) están conectados en el orden correspondiente a la etapa de la marea por una línea continua, si la sucesión de puntos es consecutiva, o por una línea a guiones si faltan uno o más puntos. La línea trazada entre dos puntos cualesquiera no es siempre la más corta, porque se hizo un esfuerzo de unir los puntos de tal manera que el lector pueda seguir los puntos sucesivos durante todo el ciclo de la marea. Como ayuda a este respecto han sido anotadas las etapas de la marea correspondientes a la bajamar (L), a la media del flujo (F), a la marea alta (H) y a la media del reflujo (E), en Balboa.

La falta de datos de tres correntómetros fue debida aparentemente a una de dos razones. En la Estación B los correntómetros a 6 y 20 pies de profundidad bajo la superficie del mar, parece que operaron durante todo el período de medición, pero las corrientes allí eran tan débiles, que la mayoría (por lo menos el 80%) de las señales de los correntómetros fueron indistinguibles de los ruidos del fondo. Por otra parte, en la E80 fueron hechas aparentemente buenas mediciones de corrientes fuertes durante los dos primeros ciclos de mareas en el período de observación de aquella estación, pero luego parece que ocurrió una falla instrumental.

Los gráficos de los puntos terminales de los vectores de las corrientes totales en la Figura 4 son las *figuras de las corrientes de las mareas* y los

centros de esas figuras son los puntos terminales de los correspondientes *vectores de las corrientes netas*. La diferencia de los vectores entre cualquier punto de la figura de la corriente de la marea y el vector de la corriente neta es la *corriente de la marea* en la fase de la marea correspondiente a ese punto.

Todas las figuras de las corrientes de las mareas tienen una gran dimensión y en casi todas ellas está orientada aproximadamente a lo largo de los 330° - 150° T. La única excepción notable es la que corresponde a la A40, que tiene una alineación noreste-suroeste. Hay, sin embargo, una gran variación en los tamaños y formas de las figuras. La máxima dimensión de las figuras varió entre 0.35 nudos (0.18 m/seg), que correspondió a la A20, y 1.34 nudos (0.75 m/seg) que correspondió a la C40, mientras que, en la forma, la variación fue desde casi elíptica en el caso de la C40, hasta casi indefinida en el caso de la D70. Otra diferencia que puede verse mejor en las figuras esencialmente elípticas es que durante un ciclo de marea el vector de la corriente de la marea giraba en el sentido de las agujas del reloj, en algunos casos (C6 y E6) y en dirección contraria en otros (A6, C40 y D6).

Los vectores de las corrientes netas fueron estimados de cada gráfico en la Figura 4 (excepto el correspondiente a la E80, que está basado en los datos de solo dos ciclos de mareas) y se presentan en las correspondientes localidades en la Figura 5. Todas las corrientes netas medidas iban dirigidas más o menos a lo largo de las isobatas y de acuerdo a la circulación contraria a las agujas del reloj, en la Bahía de Panamá a que se hizo referencia antes. La velocidad aumentó con la distancia mar afuera, o con la profundidad del agua. En las Estaciones costeras A, B y C, la velocidad fue de unos 0.35 nudos (0.18 m/seg), mientras que, mar afuera, en las D y E, la velocidad fue de más o menos 0.7 nudos (0.35 m/seg). La corriente neta varió con la profundidad en cada estación, pero la distribución vertical nunca fue la misma en dos localidades. En las Estaciones A y D, la velocidad disminuyó con el aumento de la profundidad, pero el vector viró hacia la derecha en la A, y hacia la izquierda en la D. En la Estación C, la corriente de profundidad media fue la más débil e iba dirigida mar afuera, en relación con las otras dos mediciones, mientras que en la E la corriente de profundidad media fue la más fuerte y tenía un componente costero relativo. Como se dijo antes, solo las corrientes a 40 pies en la Estación B fueron lo suficientemente fuertes como para ser registradas; esto significa que la corriente *neta* fue la más fuerte en el correntómetro colocado a mayor profundidad.

INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS

En los siguientes párrafos se formulan algunas explicaciones de las distribuciones de las corrientes observadas sobre la base de simples modelos

físicos, pero a causa de la variabilidad en las observaciones, únicamente se procede con las características más sobresalientes de las corrientes.

Definiciones y suposiciones generales

Las siguientes definiciones y cantidades se usan en el curso de las discusiones:

x	}	Coordenadas de un sistema del tipo de la derecha con dirección positiva hacia arriba z y dirección x positiva hacia el este o a lo largo de la costa, y dirección y positiva ya sea hacia el norte o en la costa. El origen del eje z es en la superficie marina que obtendría, en ausencia de las corrientes, fuerzas productoras de mareas y tensión de la superficie; el origen de los ejes x e y se explica en cada análisis
y		
z		
t		Tiempo (segundos u horas)
$u(x, y, z, t)$	}	Componentes de velocidad (m/seg) en las direcciones x , y y z , respectivamente
$v(x, y, z, t)$		
$w(x, y, z, t)$		
$\zeta(x, y, t)$		Diferencia del nivel del mar (m) desde $z = 0$
$h(x, y)$		Profundidad hasta el fondo (m) medida desde $z = 0$
ρ		Densidad del agua, supuesta como uniforme
g		Aceleración de gravedad, 9.8 m/seg ²
f		Parámetro de Coriolis, 2.23×10^{-5} /seg en la Bahía de Panamá, supuesto como constante

El origen del tiempo se toma de modo que sea simultáneo con la bajamar en Balboa.

Para la mayoría de los casos fue conveniente hacer uso de los componentes horizontales de la corriente media-vertical de la marea en la que se definen como

$$\bar{u}(x, y, t) = \frac{1}{\zeta + b} \int_{-b(x, y)}^{\zeta(x, y, t)} u \, dz$$

$$\bar{v}(x, y, t) = \frac{1}{\zeta + b} \int_{-b(x, y)}^{\zeta(x, y, t)} v \, dz$$
(1)

La forma de las ecuaciones del movimiento, usada para examinar cada una de las características de las corrientes, generalmente es diferente para cada problema y, consecuentemente, cada una se indica debajo, en

el lugar apropiado. Sin embargo, para todos los casos, la ecuación de continuidad tuvo que ser cumplida y fue usada en una forma integral. Para el agua de densidad uniforme, la ecuación de continuidad que corresponde a un elemento del volumen es

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z, t) + \frac{\partial w}{\partial z}(x, y, z, t) = 0$$

La integración de ésta, desde el fondo hasta la superficie marina, la transformación de acuerdo con la regla de Leibniz (Osgood 1935), y la sustitución de (1) dan

$$\frac{\partial}{\partial x}[(\zeta + b)\bar{u}] + \frac{\partial}{\partial y}[(\zeta + b)\bar{v}] = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (2)$$

La integración de la forma diferencial de la ecuación hidroestática, desde cualquier profundidad z hasta la superficie marina, da

$$p(\zeta) - p(z) = \rho g(z - \zeta)$$

Si se supone que la presión del nivel del mar $p(\zeta)$ es constante, entonces, por ser la densidad uniforme, los componentes de la fuerza de la gradiente de presión horizontal en cualquier profundidad z son

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(z)}{\partial x} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(z)}{\partial y} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

En palabras, la fuerza de la gradiente de presión horizontal en cualquier profundidad en agua de densidad uniforme, está directamente relacionada con la inclinación de la superficie marina superior, y es la misma para todas las profundidades.

Cualquier ensayo de explicar totalmente la influencia de la fricción en un problema hidrodinámico, es obstaculizado por el estado del conocimiento actual limitado de la turbulencia del flujo. Sin embargo, para este examen, ésta no es una restricción seria; lo que es más importante es tener la evidencia de que sí existen influencias debidas a las fricciones, y admitirlas en alguna forma. Aquí solo consideramos el efecto de la fricción del fondo, y será tomado en cuenta al suponer que existe un coeficiente vertical constante de viscosidad de remolino en las corrientes bajo investigación. Este es tal vez un paso significativo a tomar para el estudio de un movimiento turbulento constante, pero en realidad puede ser muy falso para la investigación de un movimiento periódico tal como el que está asociado con las mareas en aguas someras (Townsend 1956, p. 107).

En las siguientes deliberaciones se considera la corriente neta en la ausencia de las mareas y de las fuerzas productivas de las mareas, después de lo cual se investiga el movimiento de la marea en la ausencia de la

corriente neta. Esta separación del movimiento es útil para la consideración de las corrientes sin fricciones, pero es un artificio para los estudios que comprenden el efecto de la fricción. Aun cuando algunos cambios en la corriente neta, durante un ciclo de mareas, le parecerían a un observador ocasionados por los efectos de la marea, y en realidad pueden ser tratados como tales, en cualquier momento hay una interacción entre la turbulencia y la corriente *total* (la suma de vectores de los componentes netos y de las mareas) de modo que la separación del movimiento en los aspectos de corriente neta y corriente de la marea es, en verdad, fundamentalmente erróneo. Sin embargo, solo es interesante aquí, alguna indicación del efecto que tienen diversas fuerzas en movimientos particulares, y a este respecto, la división es aceptable.

Las corrientes netas

En la ausencia de las mareas, la conformación de la superficie del mar es una función de posición solamente, y la ecuación de continuidad (2) es entonces

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} [(\zeta + b)\bar{u}] + \frac{\partial}{\partial y} [(\zeta + b)\bar{v}] \quad (4)$$

Cuando la influencia de la fricción es insignificante y existe flujo geostrófico, hay un balance entre la fuerza de Coriolis y la gradiente de la presión horizontal. Entonces, al hacer uso de la ecuación (3),

$$0 = f\bar{v} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5)$$

y

$$0 = f\bar{u} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

Aquí fueron escritos los valores medios-verticales de los componentes de la velocidad, porque como la gradiente de la presión es uniforme con respecto a la profundidad, los componentes de la velocidad deben serlo también. Para una corriente neta de aproximadamente 1.0 m/seg, que es más fuerte que cualquiera observada en la Bahía de Panamá, la correspondiente inclinación de la superficie marina es solamente 2.3×10^{-6} . La inclinación mínima del fondo, medida normal a las corrientes netas observadas, es de unos 10^{-3} . Entonces $\zeta(x, y)$ puede no ser tomada en cuenta en la ecuación de continuidad, de modo que (4) viene a ser

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} (b\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (b\bar{v}) \quad (6)$$

Cuando las expresiones correspondientes a los componentes medios-verticales de la velocidad deducible de la ecuación (5) son substituidos dentro de ésta y la variación de la fuerza de Coriolis con la latitud no es tomada en cuenta, entonces, como ha sido demostrado por Lamb (1932, Art. 207), el resultado es

$$0 = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} \quad (7)$$

Esta condición se cumple solamente si las líneas de contorno de la superficie del mar son paralelas en todas partes a los contornos del fondo. A su vez, como el flujo es paralelo a los contornos de la superficie del mar, tiene que ser paralelo a los contornos del fondo. Sin embargo, esto depende hasta cierto grado, en que haya dos posibles direcciones de las corrientes. Supóngase, por ejemplo, que el fondo disminuye en profundidad solamente hacia el norte. Entonces (7) se cumple si el nivel del mar se levanta o descende, o si alternativamente sube y baja, en la misma dirección, y por lo tanto en cualquier posición ya sea hacia el este o hacia el oeste, la corriente es posible. Para saber qué dirección puede tomar la corriente en cualquier localidad que se determine, se requiere un conocimiento previo de la inclinación que allí tiene la superficie del mar.

En la exposición que se acaba de terminar, no se ha prestado atención a la influencia de la fricción. Ahora la tomaremos en cuenta, pero para el caso especial en que haya generalmente una corriente hacia el oeste, paralela a una zona costera recta, con la tierra al norte y el agua al sur. Si la línea hipotética de la costa rodea al mundo en su latitud particular, entonces la ecuación de continuidad (6) se cumple en todas partes, únicamente cuando \bar{v} es cero, porque no puede haber corriente media-vertical normal a la costa. Cuando las fuerzas de la fricción son incluidas, las ecuaciones (5) vienen a ser

$$0 = fv - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8)$$

$$0 = -fu - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

en las que K , el coeficiente vertical de la viscosidad del remolino se presume que es constante. Cuando la primera de éstas es integrada con respecto a la profundidad y la condición $\bar{v} = 0$ es impuesta, entonces el resultado es

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{K}{\rho b} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} (0) - \frac{\partial u}{\partial z} (-b) \right\}$$

Esto es, que existe una gradiente de presión, paralela a la costa, a fin de superar el efecto de la fricción. La integración de la segunda de las ecuaciones (8) da

$$\bar{u} = - \frac{g}{f} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{K}{\rho b f} \left[\frac{\partial v}{\partial z} (0) - \frac{\partial v}{\partial z} (-b) \right]$$

Así, que la corriente media-vertical paralela a la costa será diferente de su valor en el caso en que no haya fricción (el primer término en el lado a mano derecha) cuando existe corriente normal a la costa. Más detalles de este tipo de corriente pueden verse con el examen de una solución exacta

a las ecuaciones simultáneas (8) que fueron obtenidas bajo la siguiente serie de condiciones:

- a. la corriente en el fondo es cero;
- b. la corriente media-vertical normal a la costa \bar{v} es cero;
- c. cuando la influencia de la fricción es pequeña ($K = 0$), la pauta del flujo viene a ser la del caso en que no hay fricción;
- d. la inclinación del fondo es pequeña; y
- e. las magnitudes de ρ , f , K , b y $g \partial\zeta/\partial y$ son declaradas. La velocidad en el caso en que no hay fricción es

$$U_0 = - \frac{g}{f} \frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

de modo que al declarar la gradiente de la presión meridional, se llega a una solución de (8) en términos de U_0 . Las ecuaciones de la solución son demasiado elaboradas como para ser dadas aquí, pero algunos resultados para varios valores del coeficiente de la viscosidad del remolino son presentados en la Tabla 3 y en la Figura 6. La profundidad del agua para el cálculo fue de 20 m. En la Tabla 3 se ve que en cuanto mayor sea la influencia de la fricción (cuanto más alto sea el valor de la viscosidad del remolino) más grande es la gradiente de la presión de la zona y más pequeño es el componente de velocidad de la corriente media-vertical de la zona. Tales cambios monótonos no son característicos de la distribución vertical de las corrientes (Figura 6); los máximos valores del componente perpendicular a la costa aparecen en algún valor de la viscosidad del remolino, intermedio entre $K = 0$ y $K = \infty$, para cuyos dos valores este componente siempre es cero en todas las profundidades. En todos los casos reales, sin embargo, la corriente cerca del fondo tiene un componente hacia alta mar, mientras existe una corriente costera compensatoria en la parte superior de la columna de agua, cuando U_0 está hacia el oeste. Si U_0 está hacia el este, entonces el flujo es dirigido a la costa, cerca del fondo y hacia alta mar en la superficie. En la parte inferior de la Figura 6, han sido graficados los puntos terminales de los vectores de la corriente total correspondientes a cada distribución vertical. Puede apreciarse que cuando la influencia de la fricción es grande ($K = 100$), la magnitud del vector de la corriente horizontal cambia apreciablemente con cada aumento de la profundidad, mientras que para un valor pequeño del coeficiente de la viscosidad del remolino ($K = 1$), los vectores en la parte superior de la columna de agua son esencialmente los mismos. Esto significa que con el fin de observar los efectos de una influencia pequeña de la fricción, las mediciones deben hacerse casi en el fondo.

En resumen, cuando las influencias de la fricción son insignificantes, la corriente neta sigue los contornos del fondo, y en cualquier posición es uniforme desde la superficie del mar hasta el fondo, pero no necesita lateralmente ser uniforme. Cuando la fricción en el fondo es importante,

existe una gradiente de presión en la dirección de la corriente media. A su vez, la corriente en la dirección del flujo medio es diferida cerca del fondo y existe una circulación cruzada en la que hay un flujo costero en la superficie y un flujo hacia alta mar cerca del fondo. De qué modo las corrientes netas observadas en la Bahía de Panamá (Figura 5) cumplen cualquier modelo, es asunto discutible. El flujo está generalmente a lo largo de las isobatas en todas las profundidades en cada estación de las corrientes (excepto en la Estación C, en donde se encuentra a través de los contornos del fondo) con alguna variación en velocidad y dirección en cada una. Solamente las distribuciones verticales en las estaciones de alta mar D y E parecen ser lo que se espera cuando la fricción del fondo es importante. En las Estaciones costeras A y C, la topografía local puede ser un factor dominante en la determinación de la distribución vertical de la corriente neta; en ese caso tendría que usarse un modelo más complicado que incluya los efectos de la fricción lateral y las aceleraciones por inercia.

Las corrientes de las mareas

En el Examen se puntualizó que las mareas en el Golfo de Panamá y en la Bahía de Panamá pueden ser procesadas como ondas constantes. La significación física de este hecho es que casi toda la energía del oleaje entrante de la marea debe ser reflejada desde el fondo y la periferia del área, con poca pérdida debida a los efectos de la fricción, o bien podría no existir un oleaje permanente. Pero parte de la exposición se refiere luego al efecto evidente de la fricción en los movimientos observados en las mareas. Parece razonable suponer, en consecuencia, que aun cuando la fricción tiene un efecto observable en las mareas en el área, el efecto relativo, desde el punto de vista de la reserva de energía, es pequeño, y que no habrá pérdida de generalidad si la marea es considerada tanto como un oleaje constante y como un movimiento influenciado por la fricción.

Deducciones de la ecuación de continuidad

Para una región en la que la marea es esencialmente simultánea, puede obtenerse con la ecuación de continuidad una descripción exacta de la corriente media-vertical de la marea, en cualquier localidad, si el perfil del fondo en dirección a la subida y bajada de la marea y la amplitud de ésta son conocidas. Para ilustrar ésto, usaremos dos ejemplos sencillos.

Cuando el eje- y se toma en la dirección flujo-reflujo (en donde la dirección a la costa se toma como positiva) la ecuación de continuidad (2) es

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\zeta + b) \bar{v} \right] = - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (9)$$

La integración de $y = 0$, que es la distancia L mar afuera, según la medición

en medio de las mareas, hasta la línea del agua $y_b(t)$ de la costa y por consiguiente el uso de la regla de Leibniz produce

$$\bar{v}(0, t) = \frac{y_b(t)}{b + \zeta(t)} \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t} \quad (10)$$

En palabras, la corriente media-vertical instantánea de la marea, en la dirección flujo-reflujo, equivale al producto de la distancia a la línea de agua en la costa y la tasa de cambio del nivel del mar dividida por la profundidad total.

Caso I: El fondo disminuye en profundidad uniformemente desde la profundidad media b , en $y = 0$, hasta la profundidad media cero, en $y = L$ teniendo la costa la misma inclinación. Entonces,

$$y_b(t) = \frac{L}{b}(b + \zeta(t))$$

y (10) viene a ser

$$\bar{v}(0, t) = \frac{L}{b} \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t} \quad (11)$$

En particular, si $\zeta(t) = -\frac{R}{2} \cos \sigma t$

entonces $\bar{v}(0, t) = \frac{\sigma LR}{2b} \text{seno } \sigma t$

Así, cuando el perfil del fondo es una función lineal de distancia, la corriente de la marea correspondiente a una marea pura armónica es en sí misma una función pura armónica de tiempo que está un cuarto de período adelante de la marea.

Caso II: El fondo es de profundidad uniforme b sobre la distancia L , entre el origen frente a la costa y una "playa" vertical. Aquí $y_b(t) = L$, de modo que con $\zeta(t)$, lo mismo que antes, (10) da

$$\bar{v}(0, t) = \frac{\sigma LR}{2b - R \cos \sigma t} \text{seno } \sigma t$$

Este difiere de la fórmula del Caso I solamente por el término armónico en el denominador. El efecto del término coseno es para inclinar la curva del seno del Caso I, al avanzar el tiempo de la corriente de la pleamar máxima y al retardar el de la corriente de la bajamar máxima, mientras quedan sin afectarse los tiempos de corriente cero.

Para los dos casos fueron computadas las curvas mediante el uso de $L = 20$ km, $R = 7$ m, $b = 15$ m, y $\sigma = 0.506$ /hora (frecuencia angular de la marea semidiurna), una serie de condiciones consideradas como representativas del extremo que se había de encontrar en la Bahía de Panamá. A pesar de esto, la diferencia de la curva del Caso II, de la curva del seno, nunca fue grande, porque el cambio del tiempo de la velocidad

máxima y mínima fue solamente 0.465 hora (28 min) y la diferencia máxima en velocidad en ningún momento excedió de 0.08 m/seg (compare con la velocidad máxima de 0.66 m/seg).

La razón para el examen en detalle de los dos casos de topografía simple es que cada uno es una forma limitativa del perfil del fondo en aquella parte de la Bahía de Panamá en que fueron hechas las mediciones de la corriente; o sea, que cualquier perfil se encuentra en alguna parte entre las dos topografías simples, sin tomar en cuenta la forma que tenga. La mayoría de los perfiles son en realidad, aproximadamente parabólicos pero en todas partes de pequeña curvatura, de modo que concuerdan más cercanamente con el perfil lineal del fondo. En consecuencia no habrá diferencias significativas de las corrientes medias-verticales esperadas, si para los propósitos del cálculo se supone que el fondo, en la Bahía de Panamá, tiene una inclinación uniforme, y en realidad esto es lo que se ha supuesto para el siguiente estudio.

Para una marea armónica simple, la tasa máxima de cambio del nivel del mar ocurre en medio de las mareas, y es 1.57 veces más grande que la tasa media de cambio del nivel del mar (la fluctuación dividida por la duración). Los valores de la última han sido ya examinados con relación a las desigualdades entre el semiciclo de mareas del flujo y del reflujo, durante el período de observaciones (véase Tabla 2). Si se supone que cada semiciclo de mareas es armónico, aun así existen diferencias en medio de las mareas, por lo que estos datos pueden ser usados con la ecuación (11) para computar las corrientes medias-verticales máximas esperadas durante el flujo y la marea baja en cada estación. La ecuación (11) viene a ser

$$\bar{v}_{\max} = 0.436 \frac{L}{b} \cdot \frac{R}{D} \text{ m/seg}$$

con L en km, b y R en m, y la duración D en horas. La fórmula está completa excepto en cuanto al signo; la corriente se tiene como positiva durante las mareas altas y como negativa durante las mareas menguantes. Aunque la relación es simple, se requiere un conocimiento previo de las direcciones de las corrientes máximas de las mareas, para que dicha relación pueda ser usada. Sin ese conocimiento, solamente los valores *más bajos* esperados de la corriente máxima de las mareas, pueden ser computados en cualquier posición fuera de la costa; porque L entonces se tomaría como la distancia mínima a la costa. En tal caso, los únicos datos requeridos son L y b de una carta geográfica y R y D de las tablas predichas de las mareas.

La dirección flujo-reflujo en la Bahía de Panamá ha sido ya establecida como $330^\circ - 150^\circ T$. Al usar este dato la distancia L correspondiente a cada estación fue medida de una carta geográfica y, junto con la profundidad b corregida del mapa y de las tasas medias de cambio del nivel del mar

(Tabla 2) empleadas para calcular los valores esperados de la corriente media-vertical máxima de la marea (Tabla 4). En las Estaciones B, C y D, éstas tienen una comparación favorable con las corrientes medias-verticales máximas "observadas," que fueron estimadas mediante el promedio de las semi longitudes de la dimensión máxima de las cifras de la corriente de las mareas correspondientes a todas las profundidades, pero en la Estación A, el valor esperado es alrededor del cincuenta por ciento mayor que el valor observado, y lo contrario sucede en la Estación E. Hay una posibilidad de que la corriente, en la Estación A, sea afectada por la proximidad de la Isla Taboguilla, de modo que, con dirección hacia la costa, parte del intercambio del agua de esa estación, durante un ciclo de mareas, podría ser del nordeste o del sur, así como a lo largo de los $330^\circ - 150^\circ T$; entonces la corriente en la Estación A sería más débil de lo esperado. No se comprende el por qué, fueron observadas en la Estación E corrientes tan fuertes.

Como una aplicación de estos resultados, junto con los resultados del examen de las corrientes netas, las corrientes medias-verticales esperadas fueron computadas para la fluctuación máxima de la marea viva de 22 pies (6.7 m). En la Figura 7 se presentan las corrientes esperadas en medio de las mareas (F y R) y las mareas altas y bajas (H y L) cuando la corriente neta es de 0.35 nudos (0.18 m/seg) en las estaciones costeras, y de 0.7 nudos (0.35 m/seg) en las estaciones mar afuera. La dirección de la corriente neta fue tomada como la media de las direcciones observadas (Figura 5). Aun cuando las corrientes, en la Figura 7, son representativas de la condición extrema de la marea que ocurre en la Bahía de Panamá, la misma pauta existe en cualquier fluctuación de la marea. De modo que si la corriente neta tiene un componente en dirección del flujo, de $330^\circ T$, las corrientes durante una marea alta son más fuertes que las corrientes durante una menguante (Estación B); cuando la corriente neta tiene un componente a lo largo de los $150^\circ T$, las corrientes de las menguantes son las más fuertes (Estaciones A, C, E); y cuando la corriente neta es aproximadamente normal a la dirección flujo-reflujo, las corrientes, durante las dos mitades de un ciclo de marea, tienen igual fuerza (Estación D).

De estos resultados, se espera que las observaciones en la parte oriental de la Bahía de Panamá demuestren que las corrientes de la pleamar serían más fuertes en cualquier parte que las corrientes de las mareas menguantes.

Movimiento alternativo de las mareas con la fricción del fondo

En la sección precedente de este estudio, las corrientes de las mareas medias-verticales fueron determinadas según la aplicación de la ecuación de continuidad; podría decirse también que las mareas sin fricción fueron asimismo examinadas en dicha sección. Pero además, esos resultados son aplicables a un análisis de los efectos de la fricción, porque según el nivel del mar asciende o cae, se produce un flujo de agua correspondiente, hacia

la costa o fuera de la costa sin miras al efecto que tenga la fricción. Así, con relación a la posición del nivel del mar, las corrientes medias-verticales serán las mismas cuando se tome en cuenta la fricción, pero las corrientes no serán ya uniformes con respecto a la profundidad.

Para ver qué efecto tiene la fricción del fondo en un movimiento oscilatorio, considérese el caso simple de el movimiento armónico forzado en una dirección, en agua de profundidad uniforme. Se hace la aproximación a "marea de amplitud cero," o sea, que el nivel del mar no es una función de tiempo. La aceleración de una partícula de agua, debida a la fuerza $T(t)$ que produce la marea y a la fricción es, entonces,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = T(t) + \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Existe una solución de esta ecuación diferencial en las condiciones en que la corriente es cero en el fondo; y que cuando el valor del coeficiente vertical de la viscosidad del remolino es muy pequeño, la solución viene a ser aquella de la marea sin fricción. Si la fuerza productora de la marea es escogida como

$$T(t) = T_0 \cos \sigma t$$

entonces la solución, para cualquier profundidad, es

$$v(z, t) = \frac{T_0}{\sigma} \{ \text{seno } \sigma t - e^{-B(z+b)} \text{ seno } [\sigma t - B(z+b)] \} \quad (12)$$

donde
$$B = \sqrt{\frac{\rho \sigma}{2K}}$$

Esta solución es similar a la que dió Lamb (1932, Art. 347) en la que la segunda condición fue la de que no hay fuerza externa sobre la superficie del mar, y de hecho para los valores pequeños del coeficiente de la viscosidad del remolino, la ecuación (12) y la solución de Lamb son idénticas. Para los valores grandes del coeficiente vertical de la viscosidad del remolino, la ecuación (12) admite gradientes verticales en la velocidad horizontal de la superficie marina, pero la solución de Lamb no las admite. A su vez, esto significa que, para el flujo descrito por la ecuación (12) puede haber disipación de la energía por fricción a través de toda la extensión de la columna de agua, mientras que la solución de Lamb excluye esa disipación en la superficie del mar.

La ecuación (12) puede ser integrada con respecto a la profundidad, y entonces dividida por la profundidad a fin de obtener una fórmula para la corriente media-vertical de la marea. Para ambas la corriente media-vertical como la descrita por la ecuación (12), la fase es una función del coeficiente de viscosidad del remolino; en particular, la fase de la corriente a cualquier profundidad, es una función tanto del coeficiente de viscosidad del remolino, como de la profundidad. Relativo al origen del tiempo en la ecuación (12) se encuentra que, para los valores de la viscosidad del

remolino iguales a 1, 10, 100 y 1000 cm^2/seg , la fase de la corriente *media-vertical* de la marea es 3.5, 12, 43.5 y 74 min, respectivamente. Es decir, mientras más grande sea la influencia de la fricción, más *temprano* se produce la corriente media-vertical de la marea. Pero el ascenso y la caída de la marea son determinados por la corriente media-vertical de la misma. Así, si en cualquier localidad particular, el origen del tiempo se toma como correspondiente al tiempo de alguna posición del nivel marino (tal como el tiempo de la marea baja), un observador ve solamente la fase de la corriente a cualquier profundidad *relacionada con la fase de la corriente media-vertical de la marea*. Para la serie de valores del coeficiente vertical de viscosidad del remolino que se dió anteriormente, fue determinada la fase de la corriente de la marea, a cualquier profundidad, relacionada con la fase de la corriente media-vertical (Figura 8). Un observador notaría que, para un valor pequeño del coeficiente de la viscosidad del remolino ($K = 1$), la fase, en la parte superior de la columna de agua, es pequeña, negativa y esencialmente uniforme, pero que cerca del fondo ocurren altos valores positivos; y que, para un valor alto del coeficiente de viscosidad del remolino ($K = 1000$), la fase cambia casi uniformemente, de un valor negativo en la superficie a un valor positivo en el fondo. En todos los casos, el aspecto de la corriente de superficie es negativo, o sea, que la corriente superficial se mueve lentamente detrás de la corriente media-vertical, mientras que sucede lo contrario en la corriente cerca del fondo.

Aun cuando estos resultados han sido obtenidos en el caso de una marea sencilla alterna, puede demostrarse que se aplican directamente al examen más general que luego será ofrecido y que se refiere a la superposición de dos movimientos y a la naturaleza elíptica de algunas de las figuras de las corrientes de las mareas. Si la corriente de las mareas a cualquier profundidad observada, está en fase con la corriente media-vertical que determina el ascenso y descenso de la marea, entonces, en una figura elíptica de la corriente de la marea, los vectores de la corriente en la marea alta (H) y la marea baja (L) deberían formar los ejes menores de la elipse, y los de la semimarea del flujo (F) y reflujo (E), los ejes mayores. Recíprocamente, si para cualquier elipse dada, estos vectores particulares no coinciden con los ejes, entonces la fase no es cero. Desafortunadamente es imposible obtener una buena estimación de la fase de cada una de las formas de la Figura 4, a causa de la variabilidad en las observaciones. No parece, sin embargo, que la fase correspondiente de cualquier forma de las corrientes de las mareas sea tan extensa como el intervalo de tiempo correspondiente a una etapa de la marea (37 min). Esto está de acuerdo con los resultados teóricos, aunque sea únicamente a causa de que las profundidades fraccionales de observación (Z/b) varíen entre -0.1 y -0.7 (véase Tabla I), y para este intervalo de profundidad, la fase relacionada no debe exceder nunca de unos 25 min (Figura 8).

Naturaleza elíptica de las figuras de las corrientes de las mareas

Defant (1961, Vol. 2) demostró que una fuerza efectiva productora de

las mareas, que continuamente cambia de dirección (de modo que el correspondiente diagrama de esa fuerza sea un círculo), da origen a una figura de corriente que es un círculo, y que la superposición de dos fuerzas como esas, de diferente magnitud y en sentido opuesto de rotación, origina una figura elíptica de corriente. Recíprocamente, la observación de una figura elíptica de corriente implica la existencia de tales fuerzas. En particular, si una figura de corriente con movimiento como el de las manecillas del reloj se describe por

$$\begin{aligned}u_1 &= -V_1 \cos \sigma t \\v_1 &= V_1 \text{ seno } \sigma t\end{aligned}$$

y una figura con movimiento contrario al del reloj se describe

$$\begin{aligned}u_2 &= V_2 \cos \sigma t \\v_2 &= V_2 \text{ seno } \sigma t\end{aligned}$$

entonces, para el caso en el que la aceleración, la fuerza de Coriolis y la fuerza efectiva productora de la marea sean los términos importantes en la ecuación del movimiento, esta es,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= fv + T_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -fu + T_y\end{aligned}\tag{13}$$

la sustitución demuestra que

$$\begin{aligned}T_{1x} &= V_1 (\sigma - f) \text{ seno } \sigma t, T_{1y} = V_1 (\sigma - f) \cos \sigma t \\ \text{y} \quad T_{2x} &= -V_2 (\sigma + f) \text{ seno } \sigma t, T_{2y} = V_2 (\sigma + f) \cos \sigma t\end{aligned}$$

Así que, las figuras circulares de la fuerza de la marea tienen el mismo sentido de rotación, pero están noventa grados adelante de las correspondientes figuras de la corriente. La subsecuente superposición de estos movimientos o de las fuerzas puede resultar en cualquiera de una variedad de figuras, lo que depende de la magnitud de V_1 y de V_2 . Considere por ejemplo, la situación en la Bahía de Panamá, en donde la dirección flujo-reflujo es de $330^\circ - 150^\circ T$. Arbitrariamente puede suponerse que la fuerza productora de la marea, alterna en aquella dirección. Entonces, cuando el eje- y se toma a lo largo de los $330^\circ - 150^\circ T$, la condición

$$V_1 (\sigma - f) = V_2 (\sigma + f)$$

conduce a estas ecuaciones para expresar la fuerza alternativa de la marea:

$$\begin{aligned}T_x &= 0 \\ T_y &= [V_1 (\sigma - f) + V_2 (\sigma + f)] \cos \sigma t\end{aligned}$$

Esto significa que los dos componentes de la fuerza productora de la marea son circulares y tienen la misma magnitud y fase, pero tienen un sentido

opuesto de rotación. Debido a la fuerza de Coriolis, esta igualdad de la magnitud de los componentes no se aplica a los componentes de la corriente. Los componentes de la corriente de la figura que lleva la dirección de las agujas del reloj vienen a ser

$$u_1 = -V_2 \frac{\sigma + f}{\sigma - f} \cos \sigma t$$

$$v_1 = V_2 \frac{\sigma + f}{\sigma - f} \operatorname{seno} \sigma t$$

mientras que la figura de la corriente con dirección contraria, tiene los mismos componentes a que se ha hecho referencia anteriormente. Así que, cuando la fuerza de la marea es alterna, la magnitud de la figura de la corriente que lleva la dirección del reloj, excede la magnitud de la figura con dirección contraria. Por lo tanto, los componentes de la suma de las dos corrientes son

$$u = \frac{2f}{\sigma - f} V_2 \cos \sigma t$$

$$v = \frac{2\sigma}{\sigma - f} V_2 \operatorname{seno} \sigma t$$

que son las ecuaciones para una figura elíptica de corriente en la que el vector de corriente gira en el tiempo elípticamente hacia la derecha, y en la que la razón de los medios ejes es σ/f .

Defant (*loc. cit.*) da un sumario de todos los casos posibles de mareas sin fricción, e indica que las rotaciones *cum sole* (en sentido a las manecillas del reloj en el hemisferio norte) predominan sobre la tierra que está girando. Las observaciones indicaron que las corrientes de mareas, de rotación tanto hacia la derecha como hacia la izquierda, existen en la Bahía de Panamá (véase "Resultados" y Figura 4). Aún más, la única figura evidente con movimiento como el del reloj fue la observada cerca de la superficie del mar en las aguas más profundas (E6), mientras que las figuras de dirección contraria fueron observadas en aguas de poca profundidad o cerca del fondo (A6 y C40). Por consiguiente aunque es posible tener figuras de corrientes de marea de movimiento contrario a las manecillas del reloj al no haber fricción, las observaciones hacen pensar que la fricción del fondo juega un papel importante en la determinación del sentido de rotación en la Bahía de Panamá. A fin de investigar esta posibilidad, las ecuaciones (13) han sido escritas de nuevo para incluir la fuerza friccional, de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv + T_x + \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu + T_y + \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

son resueltas para dos fuerzas generales circulares en las mareas. Para el movimiento en dirección a las manecillas del reloj

$$T_{1x} = S \operatorname{seno} \sigma t, T_{1y} = S \operatorname{cos} \sigma t$$

y para el movimiento en sentido contrario

$$T_{2x} = -R \operatorname{seno} \sigma t, T_{2y} = R \operatorname{cos} \sigma t$$

Una solución obtenida, sujeta a las mismas condiciones, que conduce a la ecuación (12) presenta la corriente de la marea como la superposición de dos figuras de corrientes circulares. La magnitud del vector de corriente con rotación hacia la derecha es

$$V_1 = \frac{S}{\sigma - f} [1 + e^{-2\beta(z+b)} - 2e^{-\beta(z+b)} \operatorname{cos} \beta(z+b)]^{1/2}$$

en la que $\beta = \sqrt{\frac{(\sigma + f)}{2K}}$

mientras que la del vector que gira en sentido contrario es

$$V_2 = \frac{R}{\sigma + f} [1 + e^{-2\alpha(z+b)} - 2e^{-\alpha(z+b)} \operatorname{cos} \alpha(z+b)]^{1/2}$$

en la que $\alpha = \sqrt{\frac{(\sigma - f)}{2K}}$

Cuando el coeficiente de viscosidad del remolino K es lo suficientemente pequeño como para que los términos exponenciales de V_1 y V_2 puedan ser ignorados (marea sin fricción), entonces el vector de la corriente de la marea es independiente de la profundidad y gira elípticamente hacia la izquierda, solo cuando

$$R > \frac{\sigma + f}{\sigma - f} S$$

Si las influencias de la fricción no son insignificantes, ocurre un valor máximo o mínimo de V_1 (o de V_2) a una profundidad correspondiente al valor de la expresión $\beta(z+b)$ [o $\alpha(z+b)$] igual a 0.727π , $(n + 0.75)\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Ya que el argumento no puede ser nunca mayor que αb o βb , éstos colocan un límite superior en el número de las máximas o mínimas correspondientes a la figura circular de la corriente de la marea. Más aún, como α es siempre menor que β , un máximo o un mínimo de V_2 (que es la magnitud del vector con rotación hacia la izquierda) se presenta siempre a mayor profundidad que el correspondiente máximo o mínimo de V_1 . Esto significa que para profundidades cerca del fondo y en *cualquier* valor del coeficiente de viscosidad del remolino, la fricción del fondo aumenta la magnitud del vector con rotación hacia la izquierda *relacionada con la del otro vector* y, en realidad, cuando la corriente es máxima en la superficie del mar (coeficiente alto de viscosidad en el remolino o aguas poco profundas), este efecto relativo ocurre en toda la columna de agua. Por lo tanto, en general, si una figura elíptica de la corriente de la marea con rotación hacia la izquierda es observada en la superficie del mar, entonces las figuras son relativamente más anchas con el aumento de la

profundidad, mientras que si es observada una rotación hacia la derecha, en la superficie del mar, las elipses son cada vez más angostas con el aumento de la profundidad, y pueden ser aún de rotación hacia la izquierda cerca del fondo. Estos resultados y algunas de las observaciones parecen estar de acuerdo. En la Estación A, la figura con movimiento contrario al del reloj, a 20 pies, parece ser relativamente más ancha que la de los 6 pies, mientras que en la Estación E, la figura de profundidad media, con rotación hacia la derecha, es más angosta que la de cerca a la superficie. En la Estación C parece que hay rotación hacia la derecha a 6 pies, mientras que es definitiva la rotación hacia la izquierda a 40 pies. En la Estación B, la rotación hacia la izquierda, observada a 40 pies, concuerda con las figuras de las Estaciones A y C a esa profundidad. El movimiento contrario a las manecillas del reloj del vector de la corriente de la marea, en la Estación D, aparece definido tanto a 6 como a 40 pies.

Sobre la base de un buen acuerdo entre las observaciones y el modelo físico sencillo, puede llegarse a la conclusión de que la fricción del fondo es importante en la determinación del sentido de la rotación en, y de la forma de las figuras elípticas de las corrientes de las mareas en la Bahía de Panamá. Sin embargo, no puede decirse nada más sobre la naturaleza predictiva de las figuras de las mareas, porque aun permanecen muchos vacíos. Por ejemplo, en cualquier localidad no es posible saber *a priori* cuál es la fuerza productora de la marea; según observaciones a diferentes profundidades, podría estimarse un valor del coeficiente de viscosidad del remolino y, consecutivamente, podría determinarse la forma de la fuerza productora de la marea, dentro de los límites del modelo usado, pero la variabilidad en las observaciones aquí examinadas impide este paso.

RESUMEN

Según las mediciones efectuadas a tres profundidades, de las corrientes, en cada una de cinco localidades situadas en la parte occidental de la Bahía de Panamá, durante septiembre-octubre de 1958, en periodos hasta de once ciclos semidiurnos de mareas, se reafirman o aprendieron los siguientes hechos acerca de la circulación:

- a. En general, la corriente es la suma de los componentes de la corriente neta y de la corriente de la marea, de magnitud más o menos igual.
- b. La corriente neta fluye con dirección contraria a la del reloj, a través del Golfo y de la Bahía, y es parte de la Corriente de Colombia.
- c. La dirección del flujo de la corriente neta fue generalmente a lo largo de las isobatas.
- d. Dentro del contorno de 10 brazas (18 m) la velocidad de la corriente neta fue de unos 0.3 nudos (0.15 m/seg), mientras que más afuera de la

costa, pero dentro del contorno de las 20 brazas (36 m), la velocidad fue de 0.7 nudos (0.35 m/seg).

e. En las estaciones mar afuera, la fricción del fondo tenía una influencia reconocible sobre la distribución vertical de la corriente neta, ya que de acuerdo con la distribución esperada, según un modelo físico sencillo, la corriente cerca de la superficie tenía un componente de agua costera, mientras que la corriente cerca del fondo tenía un componente de alta mar; en las estaciones de la costa, las distribuciones verticales no mostraron una pauta constante, lo que indica que se requiere un modelo más elaborado para explicar las distribuciones.

f. La marea es esencialmente una onda estable y puede considerarse como tal.

g. La dirección principal flujo-reflujo de las corrientes de las mareas fue de 330° - 150° T.

b. En cualquier localidad, la corriente media-vertical de la marea, en la dirección flujo-reflujo puede representarse como una simple función del promedio de la profundidad del agua, de la distancia hacia alta mar y de la fluctuación y duración de la marea.

i. Las figuras observadas de las corrientes de las mareas fueron generalmente elípticas, con el eje mayor a lo largo de la dirección flujo-reflujo.

j. El componente de la corriente de la marea, normal a la dirección flujo-reflujo, y la dirección de la rotación del vector de la corriente en la elipse de la marea, fueron atribuidos a la fuerza de Coriolis y/o a la fricción del fondo.

k. La fase de la corriente de la marea fue aparentemente pequeña en todas partes, en relación con la posición de la marea en Balboa, pero no podría estimarse según los datos.

l. Los componentes de la corriente de la marea y de la corriente neta se combinaron para producir diferentes corrientes totales, con dependencia a la localidad; comúnmente las corrientes del reflujo fueron las más fuertes, porque la corriente neta tenía un componente a lo largo de los 150° T.

m. La corriente total máxima, que ocurre durante la fluctuación máxima de las mareas de sicigia, alcanzaría una velocidad aproximada de 1.5 nudos (0.8 m/seg) en el área entre Punta Chame y la Isla Taboga.

LITERATURE CITED — BIBLIOGRAFIA CITADA

- Cromwell, T., and E. B. Bennett. 1959. Surface drift charts for the eastern tropical Pacific Ocean [in English and Spanish]. *Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull.*, 3(5):215-237.
- Defant, A. 1961. *Physical Oceanography*. Vol. II. Pergamon Press, Oxford. 598 p.
- Fleming, R. H. 1938. Tides and tidal currents in the Gulf of Panama. *J. Mar. Res.*, 1(3):192-206.
- Forsbergh, E. D. 1963. Some relationships of meteorological, hydrographic, and biological variables in the Gulf of Panama [in English and Spanish]. *Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull.*, 7(1):1-109.
- Lamb, H. 1932. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 6th Ed. 738 p.
- Osgood, W. F. 1935. *Advanced Calculus*. Macmillan, New York. 530 p.
- Roberts, E. B. 1952. Roberts radio current meter model II, operating manual. U.S. Department of Commerce, Coast and Geodetic Survey, Washington. 32 p.
- Schaefer, M. B., Y. M. M. Bishop, and G. V. Howard. 1958. Some aspects of upwelling in the Gulf of Panama [in English and Spanish]. *Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull.*, 3(2):77-131.
- Townsend, A. A. 1956. *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge University Press. 315 p.
- U. S. Department of Commerce, Coast and Geodetic Survey. 1957. Tide tables. West coast of North and South America, including the Hawaiian Islands. U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.
- U. S. Navy Hydrographic Office. 1938. *Sailing directions for South America*. Vol. III (H. O. No. 174). U.S. Government Printing Office, Washington, D. C.

